Facoltà di Scienze

Appello 26-02-2008

COGNOME NOME CORSO DI LAUREA

Non scrivere nella parte sottostante.

0.

1.

2.

Esercizio 0. Discutere e risolvere **il maggior numero possibile** dei seguenti 4 esercizi. Giustificare sempre le risposte, fornendo una dimostrazione nel caso l'affermazione sia vera o un controesempio nel caso sia falsa.

1) Dire se il seguente sistema é compatibile.

$$\begin{cases} 3x + y + z & = & 10 \\ x + z & = & 0 \\ x + 16z & = & 1 \end{cases}$$

2) Dire se la funzione $f : \; M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definita da $f(A) = det(A)$ e' lineare dallo spazio vettoriale delle matrici reali due per due allo spazio vettoriale dei numeri reali.

3) 1. Dimostrare che l'insieme $B = \{v_1, v_2\} \subset \mathbb{R}^2$ con $v_1 = (1,1), v_2 = (2,0)$ e' una base di $\mathbb{R}^2$.
   2. Calcolare le coordinate del vettore $v = (1,2) \in \mathbb{R}^2$ nella base B.
   3. Determinare il vettore $v \in \mathbb{R}^2$ avente coordinate $(1,2)$ rispetto a B.

4) Si considerino le superfici $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ rappresentate in $\mathbf{R}^3$ dalle equazioni

$$\mathcal{C} \qquad x^2 + y^2 + x - y + 2xy + z^2 + 1 = 4$$

$$\mathcal{C}' \qquad x^2 + y^2 + x - y + 2xyz + z^2 + 1 = 4$$

- Dire se $\mathcal{C}$ è una quadrica.
- Dire se $\mathcal{C}'$ è una quadrica.
- Dire quali dei seguenti punti appartengono a $\mathcal{C}$ o a $\mathcal{C}'$: $P(1,-1,1)$; $Q(1,1,1)$; $R(1,-1,-1)$.

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $V = \mathbb{R}^4$ si considerino il sottospazio U generato da $(1,0,1,0), (-1,1,1,1), (0,1,2,-1)$ e il sottospazio

$$W = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - 2x_3 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

1. Determinare basi per U e W.
2. Determinare basi per $U + W$ e $U \cap W$.

Esercizio 2. In $\mathbf{R}^3$, si considerino le rette r_1 di equazione

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

ed r_2 di equazione

$$\begin{cases} x + y = -2 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

(a) Verificare che r_1 ed r_2 sono sghembe.

(b) Determinare equazioni per una retta r_3 che passa per il punto $P(2, 3, 1)$, che sia complanare con r_1 e che sia complanare con r_2.

(c) Esiste una retta che passi per il punto $P(2, 3, 1)$ e che sia incidente sia con r_1 che con r_2?