Facoltà di Scienze

Appello 1-02-2008-A

SOLUZIONI

Esercizio 0.

Discutere e risolvere **almeno** 3 dei seguenti esercizi. Giustificare sempre le risposte, fornendo una dimostrazione nel caso l'affermazione sia vera o un controesempio nel caso sia falsa.

1) Dire se l'insieme U é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ dove

$$U = \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$ e cosa rappresenta geometricamente.

Non è un sottospazio poiché non contiene il vettore nullo. Questa è già una giustificazione sufficiente.

Altre giustificazioni valide sono che non è chiuso rispetto alla somma: ad esempio i vettori $(1, 0, 0)$ e $(0, 0, 1)$ appartengono ad U, mentre la loro somma $(1, 0, 1)$ non appartiene ad U.

Un'altra giustificazione che sarebbe valida è che non è chiuso rispetto alla moltiplicazione per uno scalare.

Si tratta di una retta, espressa come intersezione di due piani (ad essere pignoli, bisognerebbe osservare che i due piani non sono paralleli né coincidenti).

2) Trovare due basi diverse per i vettori di $\mathbb{R}^3$ le cui prime componenti sono uguali.

Si tratta di trovare due basi distinte per il sottospazio definito dall'equazione $x_1 = x_2$. Prendendo come variabili libere x_2 e x_3, e assegnando i valori $x_2 = 1$ e $x_3 = 0$, si ottiene il vettore $(1, 1, 0)$. Assegnando i valori $x_2 = 0$ e $x_3 = 1$, si ottiene il vettore $(0, 0, 1)$. Questi due vettori costituiscono dunque una delle due basi cercate.

Un'altra base è, per esempio, $(1, 1, 0)$. $(0, 0, 2)$.

Esistevano comunque infinite possibilità per la scelta di queste basi, ad esempio anche $(1000, 1000, 99)$, $(-1, -1, 10)$. Bastava prendere due vettori che appartenessero al sottospazio in questione e che fossero indipendenti (cioè, trattandosi di due vettori, non proporzionali fra di loro).

3) Dire se é lineare l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y, z) = (3x + z, zx)$$

No, non è lineare.

Basta fornire un controesempio ad almeno una delle due condizioni

$$f(x + x', y + y', z + z') = f(x, y, z) + f(x', y', z')$$
$$f(\lambda(x, y, z)) = \lambda f(x, y, z).$$

Ad esempio,

$$f(0, 0, 1) + f(1, 0, 0) = (1, 0) + (3, 0) = (4, 0),$$

ma

$$f((0, 0, 1) + (1, 0, 0)) = f(1, 0, 1) = (4, 1) \neq (4, 0).$$

Naturalmente qualunque altro controesempio numerico sarebbe stato valido.

Dire se é lineare l'applicazione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y, z) = (3x + 5y + 2z, 0)$$

Si` , è lineare, bisogna verificare che

$$f(x + x', y + y', z + z') = f(x, y, z) + f(x', y', z')$$

e che

$$f(\lambda(x, y, z)) = \lambda f(x, y, z),$$

qualunque siano $x, y, z, \lambda \in \mathbb{R}$.

Infatti,

$$f(x+x', y+y', z+z') = (3(x+x')+5(y+y')+2(z+z'), 0) = (3x+3x'+5y+5y'+2z+2z', 0)$$

e

$$f(x, y, z) + f(x', y', z') = (3x + 5y + 2z, 0) + (3x' + 5y' + 2z', 0)$$

$$= (3x + 5y + 2z + 3x' + 5y' + 2z', 0) = (3x + 3x' + 5y + 5y' + 2z + 2z', 0).$$

Inoltre,

$$f(\lambda(x, y, z)) = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z)) = (3\lambda x + 5\lambda y + 2\lambda z, 0)$$

e

$$\lambda f(x, y, z) = \lambda(3x + 5y + 2z, 0) = (3\lambda x + 5\lambda y + 2\lambda z, 0).$$

4) Dire quali delle seguenti affermazioni e' vera o falsa.

- Tre vettori in $\mathbb{R}^3$ generano $\mathbb{R}^3$.

  Falso. Basta fornire un controesempio, ad esempio i vettori $(1,0,0)$ $(2,0,0)$ $(3,0,0)$.

  Questi non possono generare $\mathbb{R}^3$ poiché nessun vettore con la seconda componente diversa da 0 può appartenere allo spazio da essi generato.

  Qualunque altro controesempio sarebbe stato sufficiente, più esattamente, si sa dalla teoria che tre vettori di $\mathbb{R}^3$ generano $\mathbb{R}^3$ se e solo se sono linearmente indipendenti.

- Sia $A = \{w_1, w_2, w_3\}$ un insieme di vettori linearmente indipendente di $\mathbb{R}^3$ allora w_2 e' una combinazione lineare di $\{w_1, w_3\}$

  Falso, basta un controesempio. Ad esempio, $(1,0,0)$ $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$ sono vettori indipendenti, ma il secondo vettore non può essere scritto come combinazione lineare degli altri due.

  Qualunque altro controesempio sarebbe stato sufficeinte. In realtà, l'affermazione è **sempre** falsa: se $\{w_1, w_2, w_3\}$ sono vettori linearmente indipendenti e w_2 fosse una combinazione lineare di $\{w_1, w_3\}$, allora $w_2 = \alpha w_1 + \beta w_3$, per opportuni α e β, quindi $\alpha w_1 - w_2 + \beta w_3 = 0$, che contraddice l'indipendenza di $\{w_1, w_2, w_3\}$.

- 5 vettori in $\mathbb{R}^4$ sono linearmente indipendenti.

  Falsa. Basta prendere 5 vettori di $\mathbb{R}^4$ e verfificare che sono dipendenti. Ad esempio, 5 vettori uno dei quali è il vettore nullo.

  In realtà si sa dalla teoria che 5 vettori in $\mathbb{R}^4$ (che è uno spazio vettoriale di dimensione 4) sono sempre linearmente dipendenti!

- Un sistema lineare non omogeneo di 3 equazioni in 3 incognite e' compatibile

  Falsa, basta trovare un controesempio, ad esempio, $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$.

- Il sistema $A\bar{x} = \bar{1}$ con A una matrice 2×2 a coefficienti reali ha 2 soluzioni.

  Falso. Non esistono sistemi a coefficienti reali che hanno esattamente 2 soluzioni, un sistema può solo avere una, nessuna o infinite soluzioni.

Esercizio 1. Nello spazio euclideo tridimensionale si fissi un riferimento cartesiano rispetto al quale le coordinate sono x_1, x_2, x_3 e sia dato il sottospazio : $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_3 = 0\}$.

1. Determinare una base di $\mathbb{R}^3$ i cui primi due vettori appartengono ad U.

   Ponendo rispettivamente $x_2 = 1, x_3 = 0$ e $x_2 = 0, x_3 = 1$ si ottengono i vettori

   $$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   che costituiscono una base per U.

   Per estendere questi vettori ad una base di tutto $\mathbb{R}^3$ si aggiunge ad essi una base di $\mathbb{R}^3$, ad esempio la base canonica e da questo insieme di vettori si estrae una nuova base di $\mathbb{R}^3$. In dettaglio, si considerano i vettori

   $$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Applicando l'eliminazione di Gauss alla matrice ottenuta ponendo questi vettori in colonna si ottengono i tre pivot nelle prime tre colonne; i primi tre vettori originari

   $$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   costituiscono quindi una base che soddisfa alle condizioni volute.

   Il procedimento su indicato è il procedimento da applicare in un caso generale; nel caso particolare di questo esercizio era comunque abbastanza facile trovare una tale base senza effettuare calcoli.

2. Si determini un'equazione cartesiana per il piano π_1 passante per il punto $A \equiv (1, 2, 0)$, parallelo al piano $\pi : x_1 - x_3 = 0$.

   È un piano con gli stessi coefficienti di π_1; imponendo il passaggio per A si ottiene l'equazione $(x_1 - 1) - (x_3 - 0) = 0$, cioè $x_1 - x_3 - 1 = 0$.

3. Determinare equazioni cartesiane del piano π_2 passante per il punto $P = (2, -1, 3)$ e parallelo alla retta di equazione cartesiane

   $$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

e perpendicolare al piano α di equazione $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 1$.

La direzione della retta si può trovare calcolando il prodotto vettoriale fra i vettori $(1, 0, -3)$ e $(0, 1, 1)$, oppure trovando per essa equazioni parametriche. In ogni caso, la direzione è data dal vettore $(3, -1, 1)$, o da qualunque vettore ad esso proporzionale.

I coefficienti del piano cercato devono costituire un vettore perpendicolare contemporaneamente al vettore $(3, -1, 1)$ appena trovato, e al vettore dei coefficienti del piano α, cioè $(2, -3, 4)$.

Un possibile modo per determinare una terna di coefficienti per il piano cercato è di calcolare il prodotto vettoriale fra $(3, -1, 1)$ e $(2, -3, 4)$. Si ottiene il vettore $(-1, -10, -7)$. Un'equazione per il piano cercato è quindi $-(x_1 - 2) - 10(x_2 + 1) - 7(x_3 - 3) = 0$, ovvero $-x_1 - 10x_2 - 7x_3 + 13 = 0$ (salvo errori di calcolo).

4. Scrivere l'equazione cartesiana di una qualsiasi retta che sia sghemba alla retta s di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

La retta data ha direzione $(1, -2, 1)$. Basta quindi trovare una retta con direzione diversa e che abbia intersezione vuota con s. Ad esempio,

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

che ha direzione $(0, 1, 0)$ (non proporzionale a $(1, -2, 1)$) ed ha intersezione nulla con s, poiché le sue equazioni sono incompatibili con la prima equazione di s.

5. Si determini un'equazione cartesiana per la retta r passante per i punti $B \equiv (1, 0, 1)$, $C \equiv (0, 1, 0)$. Si studi infine la posizione reciproca di r e π.

Un'equazione parametrica per r è data da

$$\begin{cases} x_1 = 1 + t \\ x_2 = -t \\ x_3 = 1 + t \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione di π si ottiene $1 + t - (1 + t) = 0$, cioè $0 = 0$. Questo significa che la retta è contenuta nel piano.

Equazioni cartesiane per r si trovano eliminando il parametro, ad esempio

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_3 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Esercizio 2. Discutere e risolvere, al variare del parametro k in $\mathbf{R}$, il seguente sistema

$$\begin{cases} -x - y + k^2 z = -2 \\ -x + (k^2 - 2)y + (k^2 - 1)z = -3 \\ k^2 z = k^2 \end{cases}$$