N.B.: Ogni esercizio puo' essere risolto in molti modi giusti (e, verosimilmente, in infiniti modi sbagliati); i metodi indicati di seguito non sono gli unici possibili!

Inoltre, nessuno e' infallibile, quindi anch'io posso essermi sbagliato, anche perche' ho l'influenza; se vi accorgete di miei errori, per favore fatemelo notare.

(1) Calcolare, al variare del parametro α in $\mathbf{R}$, il rango della seguente matrice, sia col metodo dell'eliminazione di Gauss, che col metodo dei minori.

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 & -1 + \alpha \\ \alpha + 2 & 2 & 4 & \alpha \\ -\alpha + 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

SOLUZIONE. Siccome il rango di una matrice non cambia se si scambiano due colonne, e' molto conveniente (anche se tutt'altro che obbligatorio) scambiare le prime due colonne. La matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 & -1 + \alpha \\ 2 & \alpha + 2 & 4 & \alpha \\ 0 & -\alpha + 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

[N.B.: in altre situazioni (ad esempio risolvendo un sistema) **non si possono** impunemente scambiare le colonne!]

Procedendo con l'Eliminazione di Gauss si ottiene, togliendo alla seconda riga il doppio della prima:

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 & -1 + \alpha \\ 0 & -\alpha + 2 & 0 & -\alpha + 2 \\ 0 & -\alpha + 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se si scambiano la seconda e la quarta colonna, la matrice diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 + \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & -\alpha + 2 & 0 & -\alpha + 2 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha + 2 \end{pmatrix}$$

che e' ridotta a scala per qualsiasi valore di α (perche'?).

Per $\alpha \neq 2$ la matrice ridotta ha tre pivot (N.B.: non c'e' bisogno di dire "non nulli": i pivot sono non nulli per definizione!), quindi ha rango 3, cosi' come la matrice data.

Per $\alpha = 2$ la matrice ridotta diventa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ed ha un pivot, quindi ha rango 1, cosi' come la matrice data.

In definitiva, la matrice di partenza ha rango 3 per $\alpha \neq 2$, e rango 1 per $\alpha = 2$.

Risolviamo ora l'esercizio facendo uso dei determinanti.

La matrice ha sempre un elemento $\neq 0$, per esempio l'elemento $a_{22} = 2$. In altre parole, esiste sempre una sottomatrice 1 per 1 con determinante non nullo, quindi il rango della matrice data e' sempre ≥ 1 (per il Corollario 1.3 delle dispense). Aggiungiamo ora a questa sottomatrice una riga ed una colonna. Per esempio, in modo da effettuare meno calcoli possibile, la prima colonna e la terza riga.

Consideriamo cioè la sottomatrice costituita dagli elementi che stanno sia nelle prime due colonne che nelle ultime due righe, ovvero

$$\begin{pmatrix} \alpha + 2 & 2 \\ -\alpha + 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il determinante di questa matrice è $-2(-\alpha+2)$, che è uguale a zero esattamente per $\alpha = 2$. Quindi, per $\alpha \neq 2$, il rango della matrice data è sempre ≥ 2 (ancora per il Corollario 1.3).

Supponiamo per adesso $\alpha \neq 2$; tratteremo a parte il caso $\alpha = 2$. Dobbiamo aggiungere alla matrice 2 per 2 considerata sopra una riga (necessariamente, la prima) ed una colonna (o la terza, o la quarta), ottenendo, così, due nuove matrici 3 per 3.

Per il Teorema degli orlati, se i determinanti di entrambe queste matrici sono nulli, il rango della matrice di partenza è 2. (N.B.: per il teorema degli orlati non è necessario calcolare i determinanti di *tutte* le sottomatrici 3 per 3, che sarebbero ben 4 matrici!)

Si verifica che, per $\alpha \neq 2$ la sottomatrice ottenuta scartando la 3 colonna ha determinante non nullo; quindi per $\alpha \neq 2$ il rango è 3.

Consideriamo ora il caso $\alpha = 2$. La matrice originaria diventa:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Scegliamo un elemento non nullo, ad esempio $a_{1,1} = 2$. Aggiungiamo a questa matrice 1 per 1 una colonna ed una riga, calcolando il determinante della matrice così ottenuta. Se aggiungiamo la terza riga, otterremo una riga di zeri, quindi determinante sicuramente nullo. Aggiungiamo quindi elementi della seconda riga, ottenendo le seguenti matrici:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

(due volte),

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Tutte queste matrici hanno determinante =0; in altre parole, aggiungendo una qualunque colonna ed una qualunque riga all'elemento non nullo $a_{1,1} = 2$ si ottengono sempre matrici 2 per 2 con determinante diverso da 0, e questo, per il teorema degli orlati, implica che il rango della matrice è 1.

N.B.: Risolvendo un esercizio con due metodi diversi si devono ottenere gli stessi risultati! Se col metodo di Gauss e col metodo dei determinanti vi venivano risposte diverse, voleva dire che avevate commesso (almeno) un errore!

(2) In $\mathbf{R}^3$, si considerino le rette r_1 di equazione

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

ed r_2 di equazione

$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 3 \\ z = 3 + t \end{cases}$$

- (a) Verificare che r_1 ed r_2 sono sghembe.
 (b) Determinare equazioni per la retta r_3 perpendicolare ed incidente ad r_1 ed r_2 .
 (c) Determinare il punto di intersezione fra r_1 ed r_3 ; e determinare il punto di intersezione fra r_2 ed r_3 .
 (d) Determinare la distanza fra r_1 ed r_2 .

SOLUZIONE. (a) La direzione di r_1 e'

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e la direzione di r_2 e'

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

quindi le rette non sono parallele (e nemmeno coincidenti). Vediamo se si intersecano. Il metodo piu' semplice e' considerare il sistema

$$\begin{cases} 2 + t = 3 + t' \\ 3 + t = 3 \\ 4 + 2t = 3 + t' \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzione, e questo significa che le rette non sono incidenti; quindi sono effettivamente sghembe.

(b)(c) La retta r_3 deve passare per un punto

$$P(t) \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

di r_1 e per un punto

$$Q(t') \begin{cases} x = 3 + t' \\ y = 3 \\ z = 3 + t' \end{cases}$$

di r_2 .

Imponiamo ora la condizione che il vettore

$$PQ \begin{pmatrix} t' - t + 1 \\ -t \\ t' - 2t - 1 \end{pmatrix}$$

sia ortogonale sia ad r_1 che ad r_2 , cioe' che i prodotti scalari

$$\left\langle \begin{pmatrix} t' - t + 1 \\ -t \\ t' - 2t - 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\left\langle \left(\begin{array}{c} t' - t + 1 \\ -t \\ t' - 2t - 1 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \right\rangle$$

siano entrambi zero.

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -6t + 3t' - 1 = 0 \\ -3t + 2t' = 0 \end{cases}$$

con soluzioni $t = -2/3$, $t' = -1$.

Sostituendo nelle equazioni di r_1 e r_2 si ottiene $P(4/3, 7/3, 8/3)$ e $Q(2, 3, 2)$.

La retta r_3 e' la retta che passa per P e Q , quindi ha equazioni

$$\begin{cases} x = 4/3 + 2/3t'' \\ y = 7/3 + 2/3t'' \\ z = 8/3 - 2/3t'' \end{cases}$$

Naturalmente, ci sono tante altre possibili equazioni ugualmente valide per r_3 .

(d) La distanza fra r_1 ed r_2 e' uguale alla distanza fra P e Q , cioe' $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

(3) Si consideri in $\mathbf{R}^3$ il piano π di equazione $x + 2y + 3z = 1$.

(a) Determinare l'equazione del piano π in coordinate sferiche.

(b) L'equazione ottenuta rappresenta tutti i punti del piano π ?

SOLUZIONE. E' noto dalla teoria che per ogni punto $P(x, y, z)$ dello spazio non appartenente all'asse z esistono ρ, φ, θ tali che $x = \rho \cos \varphi \cos \theta$, $y = \rho \cos \varphi \sin \theta$, e $z = \rho \sin \varphi$, e inoltre ρ, φ, θ sono determinati univocamente sotto le opportune condizioni. Siccome il punto $P(x, y, z)$ appartiene a π se e solo se $x + 2y + 3z = 1$, si ha immediatamente che un punto di coordinate polari tridimensionali (ρ, φ, θ) appartiene a π se e solo se $\rho \cos \varphi \cos \theta + 2\rho \cos \varphi \sin \theta + 3\rho \sin \varphi = 1$.

Questa equazione rappresenta tutti i punti di π tranne i punti che stanno sull'asse z ; cioe' il punto di coordinate cartesiane $(0, 0, 1/3)$.