2006

Trapani

Dispensa di Geometria,

1 Risoluzione di sistemi lineari con l' uso dei determinanti

Sia A una matrice $n \times n$ con $det(A) \neq 0$ consideriamo il sistema lineare $AX = b$ abbiamo

$$n = \text{ numero di righe di } (A, b) \quad \geq rk(A, b) \geq rk(A) = n.$$

Quindi $rk(A) = rk(A, b) = n$ e dal Teorema di Rouche'-Capelli il sistema $AX = b$ ammette una ed una sola soluzione. Otteniamo $X = IX = A^{-1}AX = A^{-1}b$. Come sappiamo $A^{-1} = \frac{1}{detA} Agg(A)$ e la matrice inversa si calcola quindi mediante l' uso dei determinanti. In alternativa possiamo usare il

Teorema 1.1 *Teorema di Cramer*

Se A e' una matrice $n \times n$ con $det(A) \neq 0$ e se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ e' soluzione del sistema lineare $AX = b$ allora

$$x_i = \frac{det(A^1 \ \dots A^{i-1} \ b \ A^{i+1} \ \dots \ A^n)}{det(A)}$$

Dimostrazione.

l'equazione $AX = b$ si puo scrivere nella forma $x_1A^1 + \ldots + x_nA^n = b$ e sostituendo

$$det(A^1 \ \dots A^{i-1} \ b \ A^{i+1} \ \dots \ A^n)$$

$$= det(A^1 \ \dots A^{i-1} \ \ A^{i+1} \ x_1A^1 + \ldots + x_nA^n \ \dots A^n)$$

$$= x_1 det(A^1 \ \dots A^{i-1} \ A^1 \ A^{i+1} \ \dots \ A^n) + x_2 det(A^1 \ \dots A^{i-1} \ A^2 \ A^{i+1} \ \dots \ A^n)$$

$$+ \ldots + x_i det(A^1 \ \dots A^{i-1} \ A^i \ A^{i+1} \ \dots \ A^n) + \ldots x_n det(A^1 \ \dots A^{i-1} \ A_n \ A^{i+1} \ \dots \ A^n)$$

per la linearita' sulle colonne della funzione determinante. D'altra parte se k e' diverso da i la matrice $(A^1 \ \dots A^{i-1} \ A^k \ A^{i+1} \ \dots \ A^n)$ ha due colonne uguali ed il suo determinante e' percio' nullo. Se ne ricava che

$$det(A^1 \ \dots A^{i-1} \ b \ A^{i+1} \ \dots \ A^n) = x_i det(A^1 \ \dots A^{i-1} \ A^i \ A^{i+1} \ \dots \ A^n) = x_i det(A).$$

■

1.1 Calcolo del rango con l' uso dei determinanti

Data una matrice A $m \times n$ (non necessariamente quadrata) si chiama sottomatrice di A una matrice costituita dagli elementi comuni di alcune righe e di alcune colonne di A.

Lemma 1.2 *Sia A una matrice $m \times n$ e sia A' una sua sottomatrice $k \times k$ con $det(A') \neq 0$. Allora le righe di A contenenti elementi di A' sono linearmente indipendenti. Inoltre anche le colonne di A contenenti elementi di A' sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Sia B la matrice le cui righe sono le righe di A contenenti elementi di A'. Allora B e' una matrice $k \times n$, percio' $rk(B) \leq k$. D'altra parte le colonne di A' sono anche colonne di B e poiche' $det(A') \neq 0$ tali colonne sono linearmente indipendenti, percio' B ammette k colonne linearmente indipendenti e $rk(B) \geq k$. In conclusione $rk(B) = k$ e le k righe di B sono linearmente indipendenti. Similmente le prendiamo C la matrice le cui colonne sono le colonne di A contenenti elementi di A' vediamo che C e' una matrice $m \times k$ e $rk(C) \leq k$. D'altra parte le righe di A' sono k righe linearmente indipendenti di C e percio' $rk(C) \geq k$. In altre parole $rk(C) = k$ e le colonne di C sono linearmente indipendenti. ■

Corollario 1.3 *Sia A una matrice $m \times n$ e sia A' una sua sottomatrice $k \times k$ con $det(A') \neq 0$. Allora $rk(A) \geq k$.*

Dimostrazione.
Le righe di A contenenti elementi di A' sono k righe linearmente indipendenti di A, e si possono estendere ad una base di $span(A_1, \ldots, A_m)$. Tale base ha $rk(A)$ elementi, percio' $k \leq rk(A)$. ■

Teorema 1.4 *Teorema degli orlati*

Sia A una matrice $m \times n$ e sia A' una sua sottomatrice $k \times k$ con $det(A') \neq 0$. Sia $r = rk(A)$. Allora esiste una sottomatrice $r \times r$ A" di A tale che $det(A") \neq 0$ ed A' e' una sottomatrice di A".

Dimostrazione. Per il Lemma 1.2 Le righe di A contenenti elementi di A' sono linearmente indipendenti e si possono estendere ad una base di $span(A_1, \ldots, A_m)$. Sia B la matrice che ha per righe gli elementi di questa base. Allora le righe di B sono in numero di r e sono linearmente indipendenti, B e' allora una matrice $r \times n$ di rango r. Inoltre A' e' una sottomatrice di B con determinante diverso da 0. Sempre per il Lemma 1.2 le colonne di B contenenti elementi di A' sono linearmente indipendenti e si possono estendere ad una base si $span(B^1, \ldots, B^n)$. Questa base ha r elementi. Sia A" la matrice che ha per colonne gli elementi di questa base. Allora A" e' una matrice $r \times r$ le cui colonne sono linearmente indipendenti, percio' $det(A") \neq 0$, inoltre per costruzione A" e' una sottomatrice di A ed A' e' una sottomatrice di A". ■

Corollario 1.5 *Sia A una matrice $m \times n$. Se $A = 0$ allora $rk(A) = 0$. Altrimenti*

$rk(A) = max\{s$ numeri interi positivi tali che esiste una sottomatrice B $s \times s$ di A

con determinante diverso da zero$\}$.

Piu' precisamente sia A' una sottomatrice quadrata di A con $det(A') \neq 0$, allora

$$rk(A) = max\{s \ \ numeri\ interi\ positivi\ tali\ che\ esiste\ una\ sottomatrice\ B \ \ s \times s\ di\ A$$

$$con\ determinante\ diverso\ da\ zero\ e\ tale\ che\ A'\ e'\ una\ sottomatrice\ di\ B\}.$$

Dimostrazione. La dimostrazione e' conseguenza diretta del Corollario 1.3 e del Teorema 1.4. ■

Il Corollario 1.5 ci fornisce un metodo di calcolo del rango di una matrice A $m \times n$. Sia $l = min(m, n)$. Se $A = 0$ allora $rk(A) = 0$. Se $A \neq 0$ Sia A' una sottomatrice $k \times k$ di A con $det(A') \neq 0$. (Non si esclude il caso $k = 1$). Abbiamo allora $k \leq rk(A) \leq l$. Prendiamo tutte le sottomatrici $l \times l$ di A che ammettono A' come loro sottomatrice, se almeno una di esse ha determinante diverso da zero, allora $rk(A) = l$. Se tutte queste sottomatrici hanno determinante nullo, considero tutte le sottoatrici $(l-1) \times (l-1)$ di A che ammettono A' come loro sottomatrice, se almeno una di esse ha determinante diverso da zero, allora $rk(A) = l - 1$, altrimenti considero tutte le sottomatrici $(l-2) \times (l-2)$ di A che ammettono A' come loro sottomatrice... e cosi' via. Poiche' A' ha determinante non nullo prima o poi questo processo ha termine.

Allora il rango di A e' Il piu' grande intero della sequenza $l, l-1, l-2, ..., k$ per cui esiste una sottomatrice di A a determinante non nullo di grandezza quell' intero e che ammette A' come sua sottomatrice.

I determinanti delle sottomatrici quadrate di una matrice A si chiamano "minori di A".

1.2 Risoluzione di sistemi lineari

Dato un sistema lineare $AX = b$ con A matrice $m \times n$, per il teorema di Rouche'-Capelli il sistema e' compatibile se e solo se $rk(A) = rk(A, b)$, possiamo percio' stabilire la compatibilita' o meno del sistema usando solo determinanti. Osserviamo che si ha sempre la disuguaglianza $rk(A) \leq rk(A, b) \leq rk(A) + 1$. E' inoltre utile osservare che se $rk(A) = m =$ numero di righe di A , allora $rk(A, b) = rk(A) = m$. Infatti (A, b) ha m righe, percio' $rk(A, b) \leq m$, d'altra parte $rk(A, b) \geq rk(A) = m$, percio' in questo caso $rk(A, b) = rk(A) = m$.

Per risolvere i sistemi lineari con il solo uso di determinanti useremo il seguente

Lemma 1.6 *Sia A una matrice $m \times n$ di rango r e supponiamo che il sistema lineare $AX = b$ sia compatibile. Sia $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$ con $i_1 < i_2 \ldots < i_r$ una base di $span(A_1, \ldots, A_m)$. Sia $\tilde{A}$ la matrice che ha per righe i vettori $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$ e sia $\tilde{b} = \begin{pmatrix} b_{i_1} \\ \vdots \\ b_{i_r} \end{pmatrix}$. Allora i sistemi lineari $AX = b$ e $\tilde{A}X = \tilde{b}$ hanno lo stesso insieme di soluzioni.*

Dimostrazione. Ovviamente l'insieme delle soluzioni del sistema $AX = b$ e' contenuto nell'insieme delle soluzioni del sistema $\tilde{A}X = \tilde{b}$. D'altra partequesti due insiemi di soluzioni sono spazi affini della stessa dimensione $n - r$, contenuti l'uno nell'altro, percio' essi coincidono. ■

Osserviamo che e' necessario controllare preventivamente la compatibilita' del sistema $AX = b$, cioe' il sistema lineare $\tilde{A}X = \tilde{b}$ e' sempre compatibile mentre il sistema $AX = b$ potrebbe non esserlo.

Dato allora il sistema lineare compatibile $AX = b$ sia $r = rk(A)$ e sia A' una sottomatrice $r \times r$ di A con determinante diverso da zero. Siano $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$ le righe di A contenenti qualche elemento di A'. Sia $\tilde{A}$ la matrice che ha per righe i vettori $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_r}$ e sia $\tilde{b} = \begin{pmatrix} b_{i_1} \\ \vdots \\ b_{i_r} \end{pmatrix}$.

In conclusione se il sistema $AX = b$ e' compatibile, allora risolvere il sistema $AX = b$ e' equivalente a risolvere il sistema $\tilde{A}X = \tilde{b}$. Le colonne della matrice A' sono anche colonne della matrice $\tilde{A}$, siano esse $\tilde{A}^{j_1}, \tilde{A}^{j_2}, \ldots, \tilde{A}^{j_r}$ con $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$. Il sistema lineare $\tilde{A}X = \tilde{b}$ si puo' scrivere nella forma

$$x_1\tilde{A}^1 + x_2\tilde{A}^2 + \ldots + x_n\tilde{A}^n = \tilde{b}$$

ovvero

$$x_{j_1}\tilde{A}^{j_1} + x_{j_2}\tilde{A}^{j_2} + \ldots + x_{j_r}\tilde{A}^{j_r} =$$

$$\tilde{b} - x_1\tilde{A}^1 - x_2\tilde{A}^2 - \ldots + x_{j_1-1}\tilde{A}^{j_1-1}$$

$$-x_{j_1+1}\tilde{A}^{j_1+1} \ldots - x_{j_2-1}\tilde{A}^{j_2-1} - x_{j_2+1}A^{j_2+1} \ldots - x_{j_r+1}\tilde{A}^{j_r+1} \ldots - x_n\tilde{A}^n.$$

Fissati allora i parametri liberi $x_1, \ldots x_{j_1-1}, x_{j_1+1}, \ldots, x_{j_2-1}, x_{j_2+1}, \ldots x_{j_r-1}, x_{j_r+1} \ldots x_n$ si ottiene un sistema lineare con matrice dei coefficienti A' e con incognite $x_{j_1}, \ldots x_{j_r}$. Ma A' e' una matrice quadrata $r \times r$ a determinante diverso da zero, possiamo allora risolvere quest' ultimo sistema lineare ad esempio con il metodo di Cramer.

2 Determinante e prodotto vettoriale

Teorema 2.1 *Dati due vettori v_1 e v_2 in $\mathbf{R}^3$ sia $v_1 \wedge v_2$ il loro prodotto vettoriale, per ogni vettore $v \in \mathbf{R}^3$ vale allora la formula*

$$< v, v_1 \wedge v_2, >= det(A)$$

dove A e' la matrice che ha per righe i vettori v v_1 e v_2, e dove $< >$ e' il prodotto scalare canonico in $\mathbf{R}^3$.

Dimostrazione.

Senza dimostrazione

■

Se allora v_1 e v_2 sono vettori in $\mathbf{R}^3$ linearmente indipendenti, allora come sappiamo il vettore $v_1 \wedge v_2$ e' un vettore non nullo perpendicolare al piano generato dai vettori v_1 e v_2 ed avente lunghezza pari all' area del parallelogramma individuato dai vettori v_1 e v_2. Cioe' $||v_1 \wedge v_2|| = ||v_1|| ||v_2|| \sin(\theta)$, dove θ e' l'angolo tra 0 e π compreso tra v_1 e v_2. Le condizioni sopra esposte determinano il vettore $v_1 \wedge v_2$ a meno del segno. Per stabilire il segno osserviamo che se A e' la matrice che ha per righe i vettori $v_1 \wedge v_2$ v_1 v_2 deve essere $det(A) =< v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_2 >= ||v_1 \wedge v_2||^2 > 0$.

Osserviamo inoltre che dato un vettore $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ valgono le formule $< e_1, v >= x$, $< e_2, v >= y$, $< e_3, v >= z$ dove e_1 e_2 e_3 sono i vettori della base canonica di $\mathbf{R}^3$.

Se allora $v_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ e $v_1 \wedge v_2 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ abbiamo

$$p =< e_1, v_1 \wedge v_2 >= det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{pmatrix}\right)$$

$$= (\beta c - \gamma b)$$

$$q =< e_2, v_1 \wedge v_2 >= det\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{pmatrix}\right)$$

$$= -(\alpha c - \gamma a)$$

$$r =< e_3, v_1 \wedge v_2 >= det\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ a & b & c \end{pmatrix}\right)$$

$$= (\alpha b - \beta a)$$

3 Determinanti e volumi

Fissiamo k vettori $v_1, \ldots v_k$ linearmente dipendenti in $\mathbf{R}^n$, chiamiamo poliedro generato di $v_1, \ldots, v_k$ l'insieme

$$P_k = \{v \in \mathbf{R}^n : v = t_1 v_1 + t_2 v_2 + \ldots t_k v_k \text{ con } t_1, \ldots, t_k \text{ compresi tra 0 ed 1}\}.$$

Teorema 3.1 *Sia A la matrice che ha per colonne i vettori $v_1, \ldots v_k$, allora il volume k dimensionale $Vol_k(P_k)$ del poliedro P_k, e' dato dalla radice quadrata della somma dei quadrati dei determinanti di tutte le sottomatrici $k \times k$ della matrice A.*

Dimostrazione. Senza dimostrazione

■

Oppure il volume di P_k si puo' calcolare usando il seguente

Teorema 3.2 *Sia A la matrice che ha per colonne i vettori $v_1, \dots v_k$, allora la matrice $(A^t)A$ e' una matrice $k \times k$ con determinante positivo, inoltre il volume k dimensionale $Vol_k(P_k)$ del poliedro P_k, e' dato dalla radice quadrata di $det((A^t)A)$.*

Dimostrazione.
Senza dimostrazione
■

Se $k = 1$, l'insieme P_1 e' un segmento e il volume 1 dimensionale di P_1 e' per definizione la sua lunghezza. Se $k = 2$ l'insieme P_2 e' un parallelogramma e il suo volume 2 dimensionale e' la sua area. Se $k = 3$ l'insieme P_3 e' un poliedro tridimensionale ed il suo volume 3 dimensionale e' il suo usuale volume.

Esempio 3.3 *$k = n$ In questo caso A e' una matrice quadrata con determinante diverso da zero, e dal teorema 3.1 si ricava che $Vol_n(P_n) = |det(A)|$. In particolare se $n = 3$ l'usuale volume di P_3 e' dato da $|det(A)|$.*

Esempio 3.4 *$k = 1$, in tal caso*

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = v_1 \neq 0.$$

Le sottomatrici 1×1 di A sono le coordinaate $(x_1), (x_2), \dots (x_n)$ che coincidono con il loro determinanti. Percio' il volume 1 dimensionale del poliedro P_1, cioe' del segmento congiungente il vettore nullo con il vettore v_1 e', grazie al Teorema 3.1 la radice quadrata della somma dei quadrati delle cooordinate del vettore v_1, cioe' la sua lunghezza.

Esempio 3.5 *$k = 2$ $n = 3$. Se $v_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ allora*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ \beta & b \\ \gamma & c \end{pmatrix}.$$

Le tre sottomatrici 2×2 di A sono

$$A(1) = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ \beta & b \end{pmatrix}$$

$$A(2) = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ \gamma & c \end{pmatrix}$$

$$A(3) = \begin{pmatrix} \beta & b \\ \gamma & c \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$det(A(1)) = \alpha b - \beta a, \quad det(A(2)) = \alpha c - \gamma a, \quad det(A(3)) = \beta c - \gamma b$$

e per il Teorema 3.1 l'area di P_2 e'

$$\sqrt{(\alpha b - \beta a)^2 + (\alpha c - \gamma a)^2 + (\beta c - \gamma b)^2}$$

e si verifica subito che questo valore coincide con $||v_1 \wedge v_2||$