2006

Trapani

Dispensa di Geometria,

1 Preliminari sugli angoli

(Questa sezione e' inserita per completezza ma non e' parte del programma del corso)

Consideriamo in $\mathbf{R}^2$ la circonferenza S^1 di centro $(0,0)$ e raggio 1 data dall equazione $x^2+y^2=1$. Consideriamo l'applicazione $f:\mathbf{R}\to S^1$ data da

$$f(\theta)=\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}$$

vediamo che dato $\alpha\in\mathbf{R}$ la restrizione di f all'intervallo $[\alpha,\alpha+2\pi[$ e' continua e biunivoca da $[\alpha,\alpha+2\pi[$ in S^1 ma l' applicazione inversa f^{-1} non e' continua.

Se infatti poniamo

$$x_n=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+\frac{1}{n})\\ \\ \sin(\alpha+\frac{1}{n})\end{pmatrix}\text{ per } n \text{ dispari e } x_n=\begin{pmatrix}\cos(\alpha+2\pi-\frac{1}{n})\\ \\ \sin(\alpha+2\pi-\frac{1}{n})\end{pmatrix}\text{ per } n \text{ pari}$$

abbiamo che x_n converge a $f(\alpha)$ in S^1 ma $f^{-1}(x_n)$ non converge in $[\alpha,\alpha+2\pi[$.

D'altra parte per ogni $\alpha\in\mathbf{R}$ la restrizione di f all intervallo aperto $]\alpha,\alpha+2\pi[$ e' una applicazione continua biunivoca con inversa continua da $]\alpha,\alpha+2\pi[$ ad $S^1\setminus f(\alpha)$.

Chiaramente essa e' continua e biunivoca, resta la dimostrare la continuita' di $f^{-1}:S^1\setminus f(\alpha)\to]\alpha,\alpha+2\pi[$.

Sia z_n una successione di punti di $S^1\setminus f(\alpha)$ convergente ad un punto $z\in S^1\setminus f(\alpha)$, sia $y_n=f^{-1}(z_n)\in]\alpha,\alpha+2\pi[$ ed $y=f^{-1}(z)\in]\alpha,\alpha+2\pi[$. Dobbiamo provare che y_n converge ad y. Supponiamo per assurdo che questo non sia il caso, esiste allora una sottosuccessione y_{n_k} ed un ε reale positivo tale che $|y_{n_k}-y|>\varepsilon$ per ogni indice n_k. Poiche' l'intervallo chiuso $[\alpha,\alpha+2\pi]$ e' un sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbf{R}$, esiste una sottosuccessione di y_{n_k} che indicheremo con y_{n_h} convergente ad un qualche punto v in $[\alpha,\alpha+2\pi]$. Ne segue che $|v-y|\geq\varepsilon$ in particolare v non coincide con y. Se fosse $v=\alpha$, per la continuita' di f dovremmo avere che $f(y_{n_h})$ converge ad $f(v)=f(\alpha)$. D' altra parte sappiamo che $f(y_{n_h})=z_{n_h}$ converge a z e per ipotesi z non coincide con $f(\alpha)$, percio' v non coincide con α. Per lo stesso motivo non puo' essere $v=\alpha+2\pi$, e percio' $\alpha<v<\alpha+2\pi$. Ancora dalla continuita' di f, poiche' y_{n_h} converge a v deve essere $f(y_{n_h})$ convergente ad $f(v)$. Ma d'altra parte $f(y_{n_h})$ converge ad $f(y)$, e dato che la restrizione di f all'intervallo $]\alpha,\alpha+2\pi[$ e' iniettiva concludiamo che $y=v$, il che e' in contrasto con quanto affermato sopra. Questo assurdo implica la continuita' di f^{-1} su $]\alpha,\alpha+2\pi[$.

2 Coordinate polari

2.1 Coordinate polari nel piano

Fissiamo un sistema di coordinate ortogonali in $\mathbf{R}^2$ e fissiamo $\alpha \in \mathbf{R}$. Sia $P \in \mathbf{R}^2$ un punto diverso dall origine, sia $\rho(P)$ la distanza di P dall origine e sia $\theta(p)$ l'angolo formato dal dal segmento orientato OP e dalla semiretta delle x positive, partendo dalla semiretta e procedendo in senso antiorario. Generalmente si sceglie $\alpha = 0$ ma puo' capitare di aver bisogno di fare altre scelte di α. La coppia $(\rho(p), \theta(p))$ sono le coordinate polari del punto p. Vale $0 < \rho < +\infty \quad \alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi$. Le regola di passaggio da coordinate cartesiani a coordinate polari e viceversa sono:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ \\ y = \rho\sin(\theta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases}$$

Queste equazioni hanno senso poiche'

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = 1.$$

In conclusione le coordinate polari sono definite su $\mathbf{R}^2 \setminus (0,0)$ ma, scelto un numero reale α, il cambiamento di coordinate tra coordinate polari e coordinate cartesiane e' continuo e con inversa continua nella regione $\mathbf{R}^2 \setminus \{(\lambda\cos(\alpha), \lambda\sin(\alpha))\}$ dove λ varia nell insieme dei numeri reali non negativi. In altri termini si toglie del piano una semiretta chiusa uscente dall'origine. Per ricavare (in modo continuo) θ a partire da $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ applichiamo l'inversa della restrizione di f all'intervallo $]\alpha, \alpha + 2\pi[$.

2.2 coordinate cilindriche nello spazio tridimensionale

Dato un sistema di coordinate ortogonali in $\mathbf{R}^3$ ed un punto p non appartenente all asse z cioe' alla retta $x = y = 0$ si chiamano coordinate cilindriche di p le coordinate polari (ρ, θ) della proiezione ortogonale p' di p sul piano $z = 0$ insieme alla coordinata z di p. Fissato un numero reale α abbiamo che $0 < \rho < +\infty \;\; \alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi, \; z \in \mathbf{R}$. Le regola di passaggio da coordinate cartesiani a coordinate polari e viceversa sono:

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta) \\ y = \rho\sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2=y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2=y^2}} \\ z = z \end{cases}$$

Queste equazioni hanno senso poiche'

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = 1.$$

Le coordinate cilindriche sono definite su $\mathbf{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$ ma scelto un numero reale α il cambiamento di coordinate tra coordinate cilindriche e coordinate cartesiane e' continuo e con inversa continua solo nella regione regioni $\mathbf{R}^3 \setminus \{(\lambda\cos(\alpha), \lambda\sin(\alpha), \mu)\}$ dove λ varia nell insieme dei numeri reali non negativi e μ varia in $\mathbf{R}$. In altri termini si toglie dallo spazio tridimensionale un semipiano chiuso contenente l'asse delle z. Per ricavare (in modo continuo) θ a partire da $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ applichiamo l'inversa della restrizione di f all'intervallo $]\alpha, \alpha + 2\pi[$.

2.3 Coordinate polari nello spazio tridimensionale

Sia dato un $\mathbf{R}^3$ un sistema di coordinate ortogonali e sia S^2 la sfera di centro $(0, 0)$ e raggio 1. La sfera S^2 ha equazione cartesiana $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Cerchiamo una descrizione parametrica di S^2.

L' intersezione di S^2 con il semipiano $y = 0$ $x \geq 0$ e' la semicirconferenza di equazione $x^2 + z^2 = 1$ $y = 0$ $x \geq 0$. Dato un punto P su questa semicirconferenza sia φ l'angolo formato dal segmento orientato OP e dalla semiretta delle x positive misurato in senso antiorario. Quando P varia sulla semicirconferenza l'angolo φ varia tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$. L'angolo $\varphi = \frac{\pi}{2}$ corrisponde al polo nord di coordinate cartesiane $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ mentre l 'angolo $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ corrisponde al polo sud di coordinate cartesiane $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Una equazione parametrica della semicirconferenza e'

$$\begin{cases} x = \cos(\varphi) \\ y = 0 \\ z = \sin(\varphi) \\ \frac{-\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Fissato φ compreso tra $\frac{-\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ consideriamo l' intersezione della sfera S^2 con il piano $z = \sin\varphi$, ottieniamo una circonferenza contenuta nel piano $z = \sin(\varphi)$ di centro $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ e di raggio $\cos(\varphi)$. Una equazione parametrica di tale circonferenza e'

$$\begin{cases} x = \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ y = \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ z = \sin(\varphi) \\ \alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi \end{cases}$$

Notiamo che se il punto P sulla sfera ha coordinate cartesiane $x = y = 0$, cioe' se il punto si trova sull'asse delle z, il piano parallelo al piano $z = 0$ e passante per P

interseca la sfera nel solo punto P. In questo caso l'angolo θ non e' percio' definito. In fine fissato un numero reale α l'equazione parametrica della sfera, definita al di fuori dei poli nord e sud risulta essere

$$\begin{cases} x = \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ y = \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ z = \sin(\varphi) \\ \frac{-\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \\ \alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi \end{cases}$$

Sia ora P e' un punto di $\mathbf{R}^3$ di coordinate cartesiane $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ che non si trova sull'asse delle z. Sia ρ la distanza di p dall'origine, il punto P' di coordinate cartesiane $\begin{pmatrix} \frac{x}{\rho} \\ \frac{y}{\rho} \\ \frac{z}{\rho} \end{pmatrix}$ appartiene alla sfere S^2 e non coincide ne' con il polo sud ne' con il polo nord. Percio' esistono opportuni angoli φ e θ tali che

$$\begin{cases} \frac{x}{\rho} = \cos(\varphi)\cos(\theta) \\ \frac{y}{\rho} = \cos(\varphi)\sin(\theta) \\ \frac{z}{\rho} = \sin(\varphi) \\ \frac{-\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \\ \alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\varphi)\cos(\theta) \\ y = \rho\cos(\varphi)\sin(\theta) \\ z = \rho\sin(\varphi) \\ 0 < \rho < +\infty \\ \frac{-\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \\ \alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi \end{cases} .$$

La terna $\rho,\ \theta,\ \varphi$ e' la terna delle coordinate polari tridimensionali del punto P.

Essendo ρ la distanza di P dall'origine abbiamo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Sommando i quadrati delle due prime equazioni scritte sopra troviamo

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \left(\cos(\varphi)^2 \cos(\theta)^2 + \cos(\varphi)^2 \sin(\theta)^2\right) = \rho^2 \cos^2(\varphi).$$

Poiche' $\frac{-\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ deve essere $\cos(\varphi) > 0$ e percio'

$$\rho\cos(\varphi) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Inoltre $\sin(\varphi) = \frac{z}{\rho} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Osserviamo che, poiche' P non giace sull'asse delle z deve essere $x^2 + y^2 > 0$, d'altra parte $\cos(\theta) = \frac{x}{\rho\cos\varphi} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ e $\sin(\theta) = \frac{y}{\rho\cos\varphi} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, riassumendo per P che non giace sull'asse delle z valgono le equazioni

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \cos\varphi = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}} \\ \sin\varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \\ \alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi \end{cases}$$

Queste equazioni hanno senso poiche'

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right)^2 = 1$$

e

$$\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)^2 = 1.$$

Le coordinate polari tridimensionali sono definite su $\mathbf{R}^3 \setminus \{x = y = 0\}$ ma fissato α numero reale, il cambiamento di coordinate tra coordinate polari e coordinate cartesiane e' continuo e con inversa continua solo nella regione del tipo $\mathbf{R}^3 \setminus \{(\lambda\cos(\alpha), \lambda\sin(\alpha), \mu)\}$ dove λ varia nell insieme dei numeri reali non negativi e μ varia in $\mathbf{R}$. In altri termini si toglie dallo spazio tridimensionale un semipiano chiuso contenente l'asse delle z. Per ricavare (in modo continuo) φ a partire da $\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}$ applichiamo l'inversa della restrizione di f all'intervallo $]-\pi, \pi[$, poiche' risulta $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2}} > 0$ sara' anche $\cos(\varphi) > 0$ e percio' $\frac{-\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$. Per ricavare invece (in modo continuo) θ a partire da $\begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$ applichiamo l'inversa della restrizione di f all'intervallo $]\alpha, \alpha + 2\pi[$.