2006

Trapani

Dispensa di Geometria,

1 Equazioni parametriche e cartesiane di sottospazi affini di $\mathbf{R}^n$

Un sottospazio affine Σ di $\mathbf{R}^n$ e' il traslato di un sottospazio vettoriale. Cioe' esiste un sottospazio vettoriale V di $\mathbf{R}^n$ ed un vettore OP tale che

$$\Sigma = \{v \in \mathbf{R}^n \text{ tali che } v \text{ si puo' scrivere come somma}$$

$$\text{del vettore fisso } OP \text{ e di un vettore variabile in V } \}$$

Sinteticamente spesso scriveremo

$$\Sigma = V + OP.$$

Quindi V e' il "sottospazio parallelo a Σ" passante per 0. La dimensione di Σ e' per definizione la dimensione di V. Il sottospazio vettoriale V viene spesso chiamato giacitura di Σ.

Sia Σ un sottospazio affine di $\mathbf{R}^n$ di dimensione k e con giacitura V. Sia OP un vettore appartenente a Σ e sia $v_1, \dots v_k$ e' una base di V, un sitema di equazioni del tipo

$$X = t_1v_1 + t_2v_2 \dots + t_kv_k + OP,$$

al variare di $t_1, \dots t_k$ in $\mathbf{R}$, si chiama sistema di equazioni parametriche di Σ. Questo vuol dire che un dato vettore X appartiene a Σ se e solo se si puo' scrivere

$$X = t_1v_1 + t_2v_2 \dots + t_kv_k + OP,$$

per una opportuna scelta dei parametri $t_1, \dots t_k$.

Sia Σ un sottospazio affine di $\mathbf{R}^n$ di dimensione k, una sitema di equazioni cartesiane di Σ e' un sistema di equazioni del tipo $AX + b = 0$ dove X e' un vettore colonna di $\mathbf{R}^n$, A e' una matrice con $n-k$ righe ed n colonne di rango $n-k$, e b e' un vettore colonna in $\mathbf{R}^{n-k}$. La matrice A ed il vettore b debbono essere scelti in modo che l'insieme delle soluzioni del sistema di equazioni sopra scritto coincida con lo spazio affine Σ. Osserviamo che se A e' una matrice $n-k \times n$ di rango $n-k$, il sistema lineare non omogeneo $AX = -b$ e' sempre compatibile, infatti la matrice

$$(A \;\; -b)$$

avendo $n-k$ righe ha rango minore od uguale di $n-k$, d'altra parte il rango di

$$(A \ \ -b)$$

e' maggiore od uguale al rango di A, percio' il rango di

$$(A \ \ -b)$$

coincide con il rango di A e per il Teorema di Rouche'- Capelli il sistema e' compatibile, inoltre lo spazio delle sue soluzioni ha dimensine k.

Sia $AX+b=0$ un sistema di equazioni cartesiane di un sottospazio affine Σ di dimensione k in $\mathbf{R}^n$. Per trovare un sistema di equazioni parametriche di Σ si procede come segue:

1) Si trova una soluzione qualsiasi X_0 del sistema di equazioni lineari non omogenee $AX=-b$.

2) Si trova una base $v_1,\dots v_k$ dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $AX=0$.

L'equazione

$$X = t_1v_1 + t_2v_2 \dots + t_kv_k + X_0,$$

e' allora un sistema di equazioni parametriche di Σ.

Consideriamo di uno stesso sottospazio affine Σ di $\mathbf{R}^n$ di dimensione k un sistema di equazioni cartesiane $AX+b=0$ ed un sistema di equazioni parametriche

$$X = t_1v_1 + t_2v_2 \dots + t_kv_k + OP.$$

Poiche' l'uno e' sistema di equazioni cartesiane e l' altro e' sistema di equazioni parametriche del medesimo spazio, sostituendo l'uno nell'altro si ottiene l'equazione vettoriale

$$A(t_1v_1 + t_2v_2 \dots + t_kv_k + OP) + b = 0$$

che deve essere valida qualunque siano i valori assegnati ai parametri reali $t_1,\dots t_k$.

Cioe' l'equazione vettoriale

$$t_1A(v_1) + t_2A(v_2) \dots + t_kA(v_k) + A(OP) + b = 0$$

deve essere valida qualunque siano i valori dei parametri $t_1,\dots t_k$. Se prendiamo $t_1 = t_2 = \dots t_k = 0$ ricaviamo $A(OP)+b=0$ da cui si ottiene l' equazione

$$t_1A(v_1) + t_2A(v_2) \dots + t_kA(v_k) = 0$$

valida qualunque siano i valori dei parametri $t_1,\dots t_k$. Dato un indice i compreso tra 1 e k se scegliamo $t_i = 1 \ t_j = 0$ per j diverso da i otteniamo che deve essere $A(v_i)=0$ qualunque sia i compreso tra 1 e k. In altri termini ogni riga di A deve essere perpendicolare a tutti i vettori $v_1,\dots v_k$. Detto ancora diversamente, se chiamiamo B la matrice che ha per righe i vettori $v_1,\dots v_k$, ogni riga di A e' soluzione del sistema lineare omogeneo $BY=0$. Ora essendo i vettori $v_1,\dots v_k$ linearmente indipendenti la matrice B e' una matrice con k righe ed n colonne di rango k. Ne deduciamo che lo spazio delle soluzione del sistema lineare omogeneo $BY = 0$ ha dimensione $n - k$. D'altra parte la matrice A ha rango $n - k$, percio' i vettori riga di A sono $n - k$ soluzioni linearmente indipendenti del sistema $BY = 0$. Le righe di A sono quindi una base dello spazio delle soluzioni del sistema $BY = 0$.

Le considerazioni sopra ci permettono di ricavare un sistema di equazioni cartesiana da un sistema di equazioni parametriche di un dato spazio affine.

Piu' precisamente sia

$$X = t_1 v_1 + t_2 v_2 \ldots + t_k v_k + OP$$

un sistema di equazioni parametriche di un sottospazio affine Σ di $\mathbf{R}^n$ di dimensione k. Sia B la matrice che ha per righe i vettori $v_1, \ldots v_k$ e sia $w_1, \ldots w_{n-k}$ una base dello spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $BY = 0$. Sia A la matrice che ha per righe i vettori $w_1, \ldots w_{n-k}$ e poniamo $b = -A(OP)$. Sia Σ' lo spazio delle soluzioni del sistema $AX = -b$, sappiamo che Σ' e' un sottospazio affine di $\mathbf{R}^n$ di dimensione k. D'altra parte per come sono stati costruiti la matrice A ed il vettore b, vediamo che $\Sigma \subseteq \Sigma'$. Inoltre anche Σ e' un sottospazio affine di $\mathbf{R}^n$ di dimensione k, percio' $\Sigma = \Sigma'$ e se ne conclude che $AX + b = 0$ e' un sistema di equazioni cartesiane per Σ.

1.1 Esempi

Sia Σ una retta in $\mathbf{R}^3$ di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} 3x + y - z + 1 = 0 \\ x - y + 5 = 0 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si trova

$$y = x + 5, \quad z = 4x + 6.$$

Assegnando al parametro libero x il valore 0 troviamo la soluzione particolare del sistema $X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$. Il sistema omogeneo associato e'

$$\begin{cases} 3x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$y = x, \quad z = 4x.$$

Assegnando al parametro libero x il valore 1 troviamo come base dello spazio delle soluzioni il vettore $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Un sistema di equazioni parametriche per la retta Σ e'

$$X = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

oppure piu' esplicitamente

$$\begin{cases} x = t \\ y = t + 5 \\ z = 4t + 6. \end{cases}$$

Ricaviamo ora nuovamente equazioni cartesiane a partire dalle equazioni parametriche per Σ appena trovate. Abbiamo

$$B = (1\ 1\ 4)\,,$$

il sistema $BY = 0$ e'

$$x + y + 4z = 0$$

le cui soluzioni sono $y = -x - 4z$ con parametri liberi x e z. Assegnando ai parametri liberi il valore $x = 1 \;\; z = 0$ troviamo il vettore $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ed assegnando il valore $x = 0 \;\; z = 1$ troviamo il vettore $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. I vettori $w_1, \;\; w_2$ sono una base dello spazio delle soluzioni del sistema $BY = 0$. Possiamo quindi prendere

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = -A \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Un sistema di equazioni cartesiane per Σ e' allora $AX + b = 0$ cioe'

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ -4y + z + 14 = 0. \end{cases}$$

Se Σ e' il piano in $\mathbf{R}^3$ di equazione cartesiana $x - y + z - 1 = 0$ si possono prendere y e z come parametri liberi, si ha quindi $x = y - z + 1$. La soluzione particolare ottenuta prendendo $y = z = 0$ e' $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il sistema omogeneo associato e' $x - y + z = 0$ quindi $x = y - z$. Ponendo $y = 1, \;\; z = 0$ si trova $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e ponendo $y = 0, \;\; z = 1$ si trova $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Equazioni parametriche per il piano sono

$$X = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioe' piu' esplicitamente

$$\begin{cases} x = t - s + 1 \\ y = t \\ z = s \end{cases}$$

Viceversa per ricavare un sistema di equazioni cartesiane da quelle parametriche abbiamo $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, il sistema lineare omogeneo associato $BY = 0$ e'

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -x + z = 0. \end{cases}$$

le cui soluzioni sono $y = -x, \quad z = x$ con parametro libero x. Se poniamo $x = 1$ troviamo la base w_1 dello spazio delle soluzioni data da $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Percio' $A = (1 \ \ -1 \ 1)\,, \ \ b = -A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$. In fine una equazione cartesiana $AX + b = 0$ del piano e' $x - y + z - 1 = 0$.