SOLUZIONI Secondo Appello 15 Febbraio 2006.

(**N.B.**: Queste soluzioni sono state scritte molto affrettatamente; potrebbero essere presenti errori, specialmente errori di calcolo ma, eventualmente, anche errori concettuali. Sarò grato a chiunque vorrà segnalarmi errori.)

Fila A.

1) Per definizione di rango di una matrice, il numero cercato coincide col rango della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 1 & \beta & 1 \\ 1 & \alpha & -1 \end{pmatrix}$$

(notare che l'ordine in cui si prendono i vettori non è rilevante, quindi è opportuno scegliere l'ordine che comporta un numero minore di calcoli)

Effettuando l'eliminazione di Gauss sulla prima colonna si ottiene una matrice che ha lo stesso rango della precedente.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 0 & \beta+1 & 1-\alpha \\ 0 & \alpha+1 & -1-\alpha \end{pmatrix}$$

Procedere adesso con l'eliminazione di Gauss per righe è un metodo senza dubbio corretto, ma che comporta un numero maggiore di calcoli. È più conveniente osservare che il rango della matrice non cambia se alla seconda colonna si aggiunge la terza.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1+\alpha & \alpha \\ 0 & \beta+2-\alpha & 1-\alpha \\ 0 & 0 & -1-\alpha \end{pmatrix}$$

Lo studente accorto, a questo punto, noterà che, nonostante le apparenze, la matrice non è ridotta a scala o, per lo meno, non è sempre ridotta per qualunque valore di α e β.

Per $\alpha = -1$, la matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & \beta+3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e questa matrice ha sempre rango 2 per qualunque valore di β.

Se $\alpha \neq -1$ e $2+\beta-\alpha = 0$, cioè $\beta = \alpha - 2$, la matrice ha ugualmente rango 2, come si può vedere, ad esempio, scambiando la seconda e la terza riga, e proseguendo con l'eliminazione di Gauss.

Infine, se $\alpha \neq -1$ e $2+\beta-\alpha \neq 0$, cioè $\beta \neq \alpha - 2$, la matrice ha rango 3, poichè vi sono tre pivot.

In conclusione, il numero massimo di vettori linearmente indipendenti nell'insieme dato è:

2 se $\alpha = -1$, qualunque sia β;
2 se $\alpha \neq -1$ e $\beta = \alpha - 2$;
3 se $\alpha \neq -1$ e $\beta \neq \alpha - 2$.

Un altro metodo per risolvere l'esercizio è il seguente. Sappiamo che se la matrice ha determinante diverso da 0, allora la matrice ha rango massimo, cioè, in questo caso, 3.

Calcolando il determinante della matrice, si ottiene
$-\beta - 1 + \alpha^2 - \alpha\beta - 1 - \alpha$, cioè
$(-1-\alpha)(1-\alpha)+\beta(-1-\alpha)+(-1-\alpha) = (-1-\alpha)(1-\alpha+\beta+1) = (-1-\alpha)(2-\alpha+\beta)$.

Da ciò si deduce che, se $(-1-\alpha)(2-\alpha+\beta) \neq 0$, cioè $\alpha \neq -1$ e $\beta \neq \alpha - 2$ allora il numero di vettori cercato è 3.

Nel caso invece in cui $(-1-\alpha)(2-\alpha+\beta) = 0$, il numero è certamente minore di 3, ma, a priori, non si può sapere se è 2 oppure 1.

Questo va determinato sostituendo nella matrice i valori particolari. Cioè, una prima volta, si sostituisce $\alpha = -1$ nella matrice di partenza, lasciando β indeterminato. Poi, si tratta il secondo caso sostituendo $\beta = \alpha - 2$ sempre nella matrice di partenza, lasciando α indeterminato. (Naturalmente si sarebbe potuto equivalentemente sostituire $\alpha = \beta + 2$, lasciando β indeterminato.)

Va quindi determinato il rango delle suddette matrici, che può essere 1 oppure 2. Il valore si trova effettuando l'eliminazione di Gauss su queste matrici. I calcoli sono simili (ma leggermente più semplici) rispetto a quelli riportati all'inizio.

2) a) Effettuiamo il cambiamento di coordinate

$$\begin{cases} x = x' + \alpha \\ y = y' + \beta \end{cases}$$

determinando α e β in modo da far annullare i coefficienti dei termini di primo grado. Si ottiene $\alpha = 1/4$ e $\beta = -3/2$.

Si ottiene l'equazione $4x'^2 + y'^2 - 5/2 = 0$, che rappresenta $\mathcal{C}$ nel nuovo sistema di riferimento. Equivalentemente, $\mathcal{C}$ è rappresentata da $8/5x'^2 + 2/5y'^2 - 1 = 0$ che, col il cambiamento di coordinate affine

$$\begin{cases} x' = x''\sqrt{5/8} \\ y' = y''\sqrt{5/2} \end{cases}$$

diventa $x'' + y'' - 1 = 0$. Si tratta quindi di un'ellisse.

b) Sia r la retta tangente a $\mathcal{C}$ in $(0,0)$. Ricordiamo che, per definizione, una conica è tangente a $\mathcal{C}$ in $(0,0)$ se e solo se è tangente ad r in $(0,0)$.

Un'equazione del fascio $\mathcal{F}$ si ottiene considerando le equazioni di due coniche appartenenti al fascio, e facendone la generica combinazione lineare. In questo caso particolare, l'esercizio può essere risolto rapidamente se si osserva che la retta $y = -6x + 5$ è tangente a $\mathcal{C}$ in $(0,0)$. Quindi $\mathcal{C}$ è una conica appartenente al fascio.

Un'altra conica è, ad esempio, la retta passante per $(0,0)$ e $(1,-1)$, contata due volte, cioè la conica degenere di equazione $(x+y)^2 = 0$.

L'equazione del fascio è pertanto $\lambda(4x^2 + y^2 - 2x + 3y) + \mu(x + y)^2 = 0$, dove λ e μ variano nell'insieme dei numeri reali, e non sono entrambi nulli.

c) Siccome $\mathcal{C}$ appartiene al fascio, e passa per il punto $(1, -2)$ la conica richiesta è proprio la conica $\mathcal{C}$.

[Le soluzioni degli altri esercizi verrranno aggiunte al più presto]