Esercizi Supplementari per il Corso di Geometria I
C.L. Fisica/Fisica dell'Atmosfera, A.A. 2005/06
Prof. F. Bracci

1) Determinare una equazione del piano passante per $P = (1, 2, 1)$ e che ha per traccia sul piano $z = 0$ la retta rappresentata dall'equazione $y = 3x - 2$.

2) Sia π il piano $x + 2\beta y + z = 3$ al variare di $\beta \in \mathbb{R}$. Sia π' il piano passante per i punti $(1/\alpha, 0, 1/\alpha)$, $(0, 1, 0)$ e $(1/\alpha, 1/2, 0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per quali valori di α e β i due piani sono paralleli? Per quali valori di α e β i due piani sono perpendicolari?

3) Determinare l'equazione della quadrica in $\mathbb{R}^3$ che interseca il piano $x = 0$ nella conica $yz + 1 = 0$ e che passa per i punti $(1, 2, 0, 0)$, $(1, 0, 2, 0)$, $(1, 0, 0, 2)$ e $(1, 0, 0, 0)$. Classificare poi la quadrica trovata in modo metrico.

4) Sia $A' = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ una matrice 2×2 tale che $\det A' \neq 0$. Siano

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & a & b \\ -1 & c & d \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \beta \\ \beta \\ 1 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Si discutano al variare di α, β le soluzioni del sistema lineare $A \cdot X = B$.

5) Sia fissato un sistema di riferimento ortonormale nel piano euclideo con coordinate (x, y). Siano r_1, r_2 le due rette parallela al vettore $(1, -1)$ e tangenti al cerchio C di equazione $x^2+y^2 = 1$. Determinare l'equazione cartesiana della retta che passa dai punti di intersezione tra r_1 e C e tra r_2 e C.

6) Nel piano euclideo con coordinate (x, y, z), si consideri la conica $\alpha x^2 + y^2 + 2\alpha x - \beta = 0$. Determinare per quali valori di α, β la conica è una circonferenza e trovarne centro e raggio. Determinare inoltre se e per quali valori di α, β la circonferenza è tangente alla conica di equazione $x = y^2$.

Sia $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ regolare di classe C^k, $k \geq 2$. Il versore normale è $T := \frac{d\gamma}{dt}/\|\frac{d\gamma}{dt}\|$. La *curvatura* di γ in t è per definizione

$$\boxed{k(t) := \frac{\|\frac{dT}{dt}\|}{\|\frac{d\gamma}{dt}\|}.}$$

7) Provare che $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ è una cura regolare e calcolarne la curvatura.

8) Sia $\gamma(t) = (2\sin t, 2\sin t\cos t, 2\cos t)$. Provare che γ è una curva regolare. Calcolarne la curvatura e provare che la sua immagine è contenuta in un cilindro.

9) Sia $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^2 - 1\}$. Provare che S ammette una parametrizzazione regolare vicino ad ogni suo punto. Calcolare la curvatura di S nel punto $(0, 1)$.

10) Sia $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^2\}$. Esiste una parametrizzazione regolare per C vicino a $(0, 0)$? [Motivare la risposta]

11) Classificare in modo affine le seguenti quadriche:

1. $x^2 + y^2 + z^2 - z = 0$.
2. $x^2 - 2y^2 + 3xz - y + z^2 = 0$.
3. $x^2 + y^2 - 2xy + z^2 + 2x - 2z + 1 = 0$.