CURRICULUM
DELL'ATTIVITÀ SCIENTIFICA E DIDATTICA

Paolo Lipparini

CURRICULUM
DELL'ATTIVITÀ SCIENTIFICA E DIDATTICA

Paolo Lipparini

Lo studioso si è laureato in Matematica il 23 giugno 1980 con il massimo dei voti e con lode, sotto la direzione scientifica del Prof. Piero Mangani.

Si occupa di Algebra Generale, Teoria dei Modelli, Teoria degli Ultrafiltri e Topologia; i suoi lavori sono stati pubblicati su varie riviste, fra le quali ***Journal of Algebra***, ***Transactions of the American Mathematical Society***, ***Proceedings of the American Mathematical Society***, ***Algebra Universalis***.

Un curriculum dettagliato dell'attività scientifica è accluso di seguito.

È risultato vincitore di borse di studio, fra le quali una borsa INdAM di Ricerca (su due soli posti banditi).

Nel 1983 ha vinto un concorso per un posto di Ricercatore presso la Facoltà di Scienze M.F.N. della II Università di Roma (Tor Vergata), presso la quale presta servizio dall'8 ottobre 1984.

È confermato a decorrere dall'8 ottobre 1987[1], a regime di tempo pieno.

Ha svolto attività di insegnamento nella Scuola Secondaria di Secondo Grado.

A livello universitario ha tenuto un corso per il dottorato, è stato titolare di varie supplenze, ed ha svolto le esercitazioni di corsi di argomento algebrico, geometrico, o di matematica di base nei Corsi di Laurea in Matematica, Informatica, Fisica e Biologia.

È accluso un elenco dettagliato dell'attività didattica.

[1] Decorrenza giuridica.

Organizzazione dell'esposizione

1. ATTIVITÀ SCIENTIFICA

1.1 Attività di ricerca

(i numeri fra parentesi quadre si riferiscono ai lavori dell'Elenco completo delle pubblicazioni)

1.1.1 Algebra Generale

1.1.1.a Brevi cenni sulla teoria del commutatore

In questa sezione si accenna brevemente ad alcuni sviluppi recenti in Algebra Generale, preliminari per la discussione dei contributi dello studioso nel campo. L'esposizione ricalca essenzialmente l'introduzione del lavoro **[10]**, pubblicato su una rivista rivolta ad un pubblico generale di algebristi.

L'Algebra Generale (chiamata più spesso ma impropriamente Algebra Universale) si occupa dello studio delle strutture algebriche in generale, cioè senza porre limiti al numero di operazioni e al numero dei loro argomenti. A prima vista si potrebbe supporre che in un contesto talmente ampio sia difficile ottenere risultati significativi, e si potrebbe allo stesso modo supporre che esistano veramente poche interazioni fra l'Algebra Generale e le strutture algebriche più studiate, quali i Gruppi, gli Anelli, i Moduli etc. etc.

Tuttavia, la situazione non si presenta esattamente così. Nell'introduzione di **[10]** si presentano alcuni esempi non banali. Fra questi esempi, quello che ha costituito la motivazione per un grande numero di ricerche è la generalizzazione del concetto di commutatore.

È ben noto che le due operazioni di

(a) commutatore fra due sottogruppi normali di un gruppo e

(b) prodotto di ideali in un anello commutativo

soddisfano essenzialmente alle stesse proprietà formali (anche se le notazioni usate sono differenti: vedi la tabella seguente, sempre tratta da **[10]**). In maniera assolutamente inaspettata J. D. H. Smith (*Mal'cev varieties*, Lecture Notes in Mathematics 554, Springer-Verlag 1976) ha dimostrato che quelle stesse proprietà formali valgono per una classe molto ampia di strutture algebriche (tecnicamente, le strutture appartenenti ad un varietà a congruenze permutabili).

Notion or law	α, β, γ congruences of a general algebra	M, N, P normal subgroups of a group	I, J, K ideals of a commutative ring
Join	$\alpha + \beta$ (or $\alpha \vee \beta$)	MN	$I + J$
Meet or intersection	$\alpha\beta$ (or $\alpha \wedge \beta$ or $\alpha \cdot \beta$)	$M \cap N$	$I \cap J$
Modular (or Dedekind) law	$\alpha(\beta + \gamma) \leq \beta + \alpha\gamma$ if $\beta \leq \alpha$	$M \cap NP \leq N(M \cap P)$ if $N \leq M$	$I \cap (J + K) \leq J + (I \cap K)$ if $J \leq I$
Commutator	$[\alpha, \beta]$	$[M, N]$	IJ
Distributivity of commutator	$[\alpha, \beta + \gamma] = [\alpha, \beta] + [\alpha, \gamma]$	$[M, NP] = [M, N][M, P]$	$I(J + K) = IJ + IK$
Commutativity of commutator	$[\alpha, \beta] = [\beta, \alpha]$	$[M, N] = [N, M]$	$IJ = JI$
Submultiplicativity	$[\alpha, \beta] \leq \alpha\beta$	$[M, N] \leq M \cap N$	$IJ \leq I \cap J$
Define (cyclically modulo 3):	$\gamma_i = (\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2})(\beta_{i+1} + \beta_{i+2})$	$P_i = (M_{i+1}M_{i+2}) \cap (N_{i+1}N_{i+2})$	$K_i = (I_{i+1} + I_{i+2}) \cap (J_{i+1} + J_{i+2})$
Then the Arguesian law reads	$(\alpha_0 + \beta_0)(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_2 + \beta_2) \leq \alpha_1(\gamma_0(\gamma_1 + \gamma_2) + \alpha_2) + \beta_1$	$M_0N_0 \cap M_1N_1 \cap M_2N_2 \leq N_1(M_1 \cap ((P_0 \cap P_1P_2)M_2))$	$(I_0 + J_0) \cap (I_1 + J_1) \cap (I_2 + J_2) \leq I_1 \cap (K_0 \cap (K_1 + K_2) + I_2) + J_1$

Nel caso di una struttura algebrica generale, alla nozione di sottogruppo normale, rispettivamente di ideale bilatero, corrisponde quella di congruenza, cioè di nucleo di un omomorfismo, pensato come relazione di equivalenza. La teoria di Smith ha reso possibile in algebra generale l'uso di metodi e nozioni, quali "abeliano", "risolubile", "nilpotente", che sembravano applicabili solo nel caso dei gruppi (o degli anelli, con differente terminologia). Questa teoria si è presto dimostrata di una utilità eccezionale nel risolvere molti problemi aperti, nell'ottenere importanti generalizzazioni di risultati noti, nel semplificare notevolmente certe dimostrazioni, oltreché nel produrre teoremi completamente nuovi (vedi, oltre al libro di Smith: H. P. Gumm, *Geometrical Methods in Congruence Modular Algebras*, AMS Memoirs 286, 1983 e R. Freese, R. McKenzie, *Commutator Theory for Congruence Modular Varieties,* London Mathematical Society Lecture Notes 125, Cambridge University Press, 1987).

Non ci si è soffermati sulla definizione precisa della condizione cui devono soddisfare le strutture affinché si possa applicare la teoria sviluppata da Smith poiché pochi anni dopo J. Hagemann e C. Herrmann, in modo forse ancor più inaspettato, sono riusciti a generalizzare la teoria ad un ambito ancora più vasto, quello delle strutture appartenenti ad una varietà a congruenze modulari. H. P. Gumm è riuscito poi a semplificare e a migliorare ulteriormente questa teoria.

Ricordiamo che una *varietà* è una classe di strutture chiusa rispetto alle operazioni di prodotto, sottostruttura e immagine omomorfa; la *legge modulare* non è altro che la traduzione della legge di Dedekind valida per sottogruppi normali di un gruppo o per ideali di un anello commutativo. Le introduzioni di **[3]** e **[10]** contengono un'esposizione più dettagliata degli sviluppi sopra descritti, insieme agli ulteriori opportuni riferimenti bibliografici.

1.1.1.b Contributi dello studioso alla teoria del commutatore: il caso non modulare

Il lavoro **[3]** prende le mosse da questo stato delle cose. Probabilmente, a quel tempo, la maggior parte degli studiosi nel campo erano già abbastanza stupefatti dall'ambito così ampio in cui la teoria del commutatore era applicabile, da credere addirittura inimmaginabile una sua ulteriore estensione. In effetti in **[3]** si dimostra che, se non vale l'assunzione della modularità, alcune proprietà del commutatore vanno necessariamente perse. Ma questo risultato negativo è largamente compensato da una mole notevole di risultati positivi ottenuti in **[3]**. Infatti, la proprietà distributiva, che a prima vista sembrerebbe la proprietà irrinunciabile nelle applicazioni, si rivela inessenziale: quasi tutti i risultati la cui dimostrazione fa uso di questa proprietà possono venire dimostrati senza! Il prezzo da pagare è naturalmente una maggiore complessità delle dimostrazioni, ma l'importante è che i risultati continuino a valere e, soprattutto, che l'unica ipotesi di cui si fa uso, l'esistenza di un *termine-differenza debole*[2], vale, essenzialmente, per tutte le strutture algebriche che sono non banali, in un senso che si può definire rigorosamente.

Infatti, la teoria sviluppata in **[3]** è applicabile non solo a tutte le strutture appartenenti ad una varietà a congruenze modulari (quindi, ad esempio, gruppi, anelli, moduli, quasigruppi, reticoli), ma anche a semireticoli, alcuni semigruppi (in particolare, gli "inverse semigroups"), a strutture neutrali (quelle che soddisfano ad $[\alpha,\alpha]=\alpha$ per ogni congruenza α), a varietà n-permutabili (vedi la sezione *1.1.1.d*) e a varietà localmente finite che "omettono" il tipo **1**, nel senso di D. Hobby and R. McKenzie (vedi più oltre).

Solitamente, l'Algebra Generale si limita a studiare strutture appartenenti a *varietà* soddisfacenti a determinate proprietà: per ottenere risultati significativi è di solito necessario supporre che una certa proprietà valga per tutte le strutture appartenenti ad una varietà, piuttosto che per una singola struttura. È quindi abbastanza importante notare anche che, per ottenere i risultati di **[3],** sia sufficiente che il *termine-differenza debole* sia presente in una singola struttura, senza ulteriori ipotesi da richiedere alla varietà cui questa struttura appartiene (vedi p. 179 di **[3]**).

Per inciso, esistono comunque caratterizzazioni interessanti delle varietà le cui strutture hanno tutte un *termine-differenza debole*: esse sono state ottenute nei lavori **[7], [8]**, dove vengono anche caratterizzate le varietà neutrali (quest'ultima caratterizzazione è stata in seguito utilizzata in vari lavori di R. Willard e altri, ad esempio: R. Willard, *A finite basis theorem for residually finite, congruence meet-semidistributive varieties,* J. Symb. Logic 65 (1), 2000; e K. Kearnes, R. Willard, R*esidually finite congruence meet-semidistributive varieties of finite type have a finite residual bound,* Proceedings AMS 127, 2841-2850).

[2] Un *termine-differenza* è un termine t a tre posti tale che $a=t(a,b,b)$ e $t(a,a,b)\ [\alpha,\alpha]\ b$ ogni volta che $a\ \alpha\ b$. Un *termine-differenza debole* è un termine t a tre posti tale che $a\ [\alpha,\alpha]\ t(a,b,b)$ e $t(a,a,b)\ [\alpha,\ \alpha]\ b$ ogni volta che $a\ \alpha\ b$.

I risultati di **[3]** riguardano permutabilità di congruenze, conseguenze dell'abelianità e della risolubilità, relazioni tra identità soddisfatte da congruenze, con e senza commutatore. Inoltre si dimostra che la forma del reticolo delle congruenze di una struttura algebrica ha notevole influsso sul comportamento delle operazioni della struttura (il prototipo dei risultati è l'esempio che se M_3 è un sottoreticolo del reticolo dei sottogruppi normali di un gruppo, allora il gruppo è abeliano). In questa direzione, certi reticoli implicano l'abelianità, certi altri la non abelianità, e molti reticoli non possono essere reticoli delle congruenze di strutture con un *termine-differenza debole*.

Durante gli anni '80 D. Hobby and R. McKenzie (*The structure of finite algebras*, Contemp. Math. 76, AMS 1988) hanno ottenuto una teoria estremamente dettagliata sulle varietà localmente finite (quelle in cui ogni struttura finitamente generata è finita), classificandole a seconda dei "tipi" che "omettono". Le varietà localmente finite con un *termine-differenza debole* hanno una ben precisa caratterizzazione in questo senso: sono esattamente quelle che "omettono" il tipo **1**: i risultati di **[3]**, per la maggior parte, non solo sono nuovi nel caso particolare e già molto studiato delle varietà localmente finite, ma addirittura valgono anche senza nessuna ipotesi di finitezza!

Risultati ancora più forti di quelli ottenuti in **[3]** sono presentati in **[18]**, ove si mostra che alcuni teoremi di **[3]** si estendono dal caso delle congruenze al caso di arbitrarie relazioni compatibili; inoltre, i casi dell'esistenza di un *termine-differenza debole* e di un *termine-differenza* vengono trattati in maniera unificata, anzi, la teoria sviluppata in **[18]** è indipendente dalla definizione di commutatore. In effetti, **[18]** rappresenta l'inizio di un vasto progetto di ricerca descritto in maggior dettaglio nei preprint [35].

1.1.1.c Contributi dello studioso alla teoria del commutatore: il caso modulare.

Sebbene originariamente l'interesse dello studioso si fosse rivolto all'estensione della teoria al caso più generale (non modulare), anche perché la teoria modulare sembrava già sufficientemente completa, in seguito è riuscito ad applicare la teoria del commutatore per ottenere nuovi risultati e semplici dimostrazioni per risultati classici nel caso di varietà a congruenze modulari.

Nel lavoro **[10]** si ottiene una dimostrazione particolarmente semplice di un risultato precedentemente ottenuto da R. Freese and B. Jonsson: se tutte le strutture di una varietà hanno il reticolo di congruenze modulare, allora questi reticoli soddisfano ad identità ancora più forti, come l'identità arguesiana (questa identità ha anche un significato geometrico: il reticolo dei sottospazi di una geometria proiettiva è arguesiano se e solo se, in quanto geometria, soddisfa al teorema di Desargues). Per inciso, anche i casi particolari di questo risultato per i gruppi e gli anelli sembrano essere stati dimostrati per la prima volta in ambito generale da Jonsson. Identità ancora più forti sono ottenute in **[13]** e [32].

Esistono molti altri risultati del tipo sopra menzionato: se tutti i reticoli di congruenze delle strutture di una varietà soddisfano ad una certa identità ε, allora questi reticoli soddisfano anche ad identità più forti ε', e questa implicazione è non banale, nel senso che ε' non segue da ε nella teoria dei reticoli. Questo campo di ricerca va sotto il nome di "*congruence varieties*", ed una introduzione a queste linee di ricerca è presentata nel lavoro **[23]**.

Un risultato di questo tipo, riguardante però identità più deboli della modularità è ottenuto in **[12]**; in effetti, **[12]** sembra essere in assoluto il primo risultato sulle "*congruence varieties*" riguardante identità strettamente più deboli della modularità.

Tornando a **[10]**, è comunque da notare che alcuni risultati riguardano strutture con un *termine-differenza*, o anche solo con un *termine-differenza debole*, senza bisogno di assumere la modularità e, come in altri casi, è sufficiente assumere l'esistenza del *termine-differenza* per una struttura singola, anziché per una varietà.

Recentemente, sono state trovate caratterizzazioni equivalenti della modularità (per congruenze) per mezzo di identità soddisfatte da tolleranze (una tolleranza è una relazione compatibile riflessiva e simmetrica; in altre parole una "congruenza non necessariamente transitiva"). Queste identità riguardanti le tolleranze hanno trovato un discreto numero di applicazioni; l'introduzione di **[23]** presenta alcuni di questi risultati. Non risulta ancora completamente chiaro il motivo per cui le tolleranze abbiano assunto questa importanza; in questo senso, però, il lavoro **[16]** analizza approfonditamente la relazione fra congruenze e tolleranze: in **[16]** si trovano ipotesi sotto le quali, in una varietà arbitraria, una identità di congruenze è equivalente alla *stessa* identità per tolleranze. **[16]** contiene inoltre un'approfondita analisi dell'uso classico dei grafi per ottenere le cosiddette Condizioni di Mal'cev.

Facendo uso delle tolleranze, si può ottenere anche un'ulteriore dimostrazione del risultato di R. Freese and B. Jonsson sopra menzionato. Questa dimostrazione è contenuta in **[13]**; in effetti, in **[13]** si ottengono identità ancor più forti, le *Higher Arguesian identities* introdotte da M. Haiman. Il lavoro **[13]** contiene altri raffinati risultati sulle varietà modulari: in ogni varietà modulare ogni identità di congruenze è equivalente ad una condizione di Mal'cev; inoltre, la dimostrazione fornisce la condizione di Mal'cev ottimale. Un altro risultato importante contenuto in **[13]** è che, in una varietà modulare, ogni termine si può ottenere come composizione di due termini, il primo calcolato come se fossimo in una varietà distributiva, il secondo come se fossimo in una varietà permutabile. Questa è la forma più forte finora conosciuta dell'idea intuitiva che considera la modularità come "la composizione della distributività con la permutabilità".

Risultati simili, che fanno ancora uso delle tolleranze, ma che sono più forti perchè espressi in forma locale sono dimostrati in **[14]** e **[23]**. Probabilmente questi non sono ancora i risultati migliori ottenibili; in questo senso, in **[14]** e **[23]** vengono enunciati parecchi problemi aperti.

In **[9]**, **[27]** e [32] si ottengono dimostrazioni più semplici e generalizzazioni di risultati precedentemente ottenuti da altri autori.

1.1.1.d Ulteriori contributi: varietà n-permutabili.

Due relazioni di equivalenza R e S si dicono *permutabili* se R∘S =S∘R, dove ∘ indica la composizione di relazioni. Più in generale, R e S si dicono *n-permutabili* se R∘S∘R...=S∘R∘S... (dove ∘ appare *n-1* volte in ciascun membro). La caratterizzazione data da Mal'cev negli anni ’50 delle varietà di strutture algebriche a congruenze permutabili si può considerare senza ombra di dubbio l'inizio dell'Algebra Generale moderna.

Lo studio della nozione di *n*-permutabilità, se in origine poteva sembrare giusto un’esercitazione di tipo accademico priva di interesse sostanziale, si sta invece rivelando di notevole importanza. Infatti le varietà localmente finite *n*-permutabili hanno una semplice descrizione nella menzionata teoria di Hobby e McKenzie: sono esattamente le varietà che “omettono” i tipi **1, 4** e **5**. Inoltre Hobby e McKenzie forniscono altre caratterizzazioni semplici ed interessanti, e si avvicinano ad ottenere teoremi di struttura per membri di tali varietà; in particolare dimostrano che per ogni varietà *n*-permutabile esiste un'uguaglianza nel linguaggio dei reticoli soddisfatta da tutte le strutture della varietà.

In **[4]** lo studioso dimostra il risultato per varietà qualunque, senza bisogno di ipotesi di finitezza, risultato che all'epoca ha sorpreso parecchio (vedi R. Freese, *Alan Day’s early work: congruence identities*, Algebra Universalis 34, 4-23, 1995), sia per la sua dimostrazione molto semplice, sia perché non si riteneva possibile estendere in questo senso i risultati di Hobby e McKenzie. I lavori **[3]** e **[4]** hanno anticipato alcune linee di ricerca attuali di quasi un decennio. Inoltre, le identità di **[4]** dipendono solo da *n*, non dalla varietà presa in considerazione.

Ulteriori identità sono state trovate in **[17]**, **[31]** e [33]; quest'ultimo è particolarmente interessante perchè la dimostrazione non fa uso della teoria del commutatore. In **[17]**, invece, si dimostra che ogni varietà *m*-permutabile soddisfa all'identità $\alpha\beta_h=\alpha\gamma_h$ per un opportuno *h* che dipende solo da *m*. Questo risultato è particolarmente significativo poiché questa identità era già stata intensamente studiata in precedenza, ed ha varie applicazioni, anche di natura esclusivamente di Teoria dei reticoli. Inoltre **[17]** fornisce una nuova caratterizzazione, interessante in sè, delle varietà che sono *m*-permutabili per qualche *m*.

1.1.2 Teoria dei Modelli

La Teoria dei Modelli può essere definita come l'intersezione fra l'Algebra e la Logica Matematica.

In effetti, la sostanza del lavoro **[24]** è puramente algebrica. Le strutture *esistenzialmente complete* sono l'analogo, per una teoria qualunque, dei campi algebricamente chiusi per la teoria dei campi. Non sempre la classe delle strutture esistenzialmente complete è assiomatizzabile: quando questo succede si dice che la teoria in questione ha *"model companion"*. Questi concetti sono dovuti ad A. Robinson e alla sua scuola.

McKinsey e Tarsky negli anni '40 hanno introdotto il concetto di *algebra di chiusura* (in terminologia moderna): si tratta di una algebrizzazione delle proprietà degli spazi topologici: un'algebra di chiusura è un'Algebra di Boole con un operatore che soddisfa alle proprietà dell'operatore di chiusura in topologia. In **[24]** si caratterizzano, con calcoli di natura esclusivamente algebrica, le algebre di chiusura esistenzialmente complete, e si dimostra che questa classe di algebre non ha "model companion". Una conseguenza dei metodi usati in **[24]** (anche se non enunciata esplicitamente) è che la teoria universale delle algebre di chiusura è decidibile. Analoghi risultati si dimostrano per teorie leggermente più deboli. In **[24]** si dimostra inoltre che tutte queste teorie godono di una proprietà di natura algebrica chiamata *proprietà di amalgama*.

Alcuni dei metodi di **[24]** si prestavano a generalizzazioni; e questo è stato realizzato concretamente in [25]. I risultati di [25] sono particolarmente utili nel caso di teorie localmente finite, e sono stati usati da Albert e Burris e altri in alcuni lavori su teorie con ordini (vedi M. Albert, S. Burris, *Bounded obstructions, model companions and amalgamation bases,* Z. Math. Logik Grundlag. Math. 34(2), 109-115, 1998).

Gli altri lavori dello studioso in Teoria dei Modelli [**1**, **2**, **6**, 19, 20, 21, 26, 28, 29, 30] riguardano la Teoria dei Modelli Astratta, cioè la Teoria dei Modelli per logiche che estendono la logica del primo ordine.

1.1.3 Ultrafiltri e Topologia

Gli ultrafiltri sono uno strumento interdisciplinare che ha trovato applicazioni (direttamente, o tramite la costruzione correlata degli ultraprodotti) in vari campi, compresi la Topologia, la Teoria dei Modelli, la Teoria degli Insiemi e in taluni casi l'Algebra. Applicazioni algebriche degli ultraprodotti si possono trovare nella dimostrazione del Teorema di Posner (vedi Herstein, *Non commutative rings*, Capitolo 7), nel capitolo *A3 Ultraproducts for algebraists* dell'*Handbook of Mathematical logic*, curato da J. Barwise, o anche nelle pagine 45 e 46 di H. P. Gumm, *Geometrical Methods in Congruence Modular Algebras*, AMS Memoirs 286 (1983).

Le proprietà di regolarità degli ultrafiltri, studiate inizialmente in un ambito di Teoria degli Insiemi, possono essere caratterizzate anche in maniera algebrica tramite gli ultraprodotti. L'idea portante di **[2]** è proprio quella di dare una definizione equivalente algebrica di regolarità: un ultrafiltro è regolare se e solo se l'ultrapotenza di una certa struttura soddisfa ad una determinata proprietà (il caso generale della definizione comprende due parametri, che qui si tralasciano per semplicità).

Questa definizione si è rivelata particolarmente utile ed è stata usata in **[11]** e [34] per ottenere risultati nuovi sulle relazioni che legano le proprietà di regolarità al variare dei parametri; è stata usata in **[2]**, **[6]**, [26], [28], [29] e [30] per applicazioni alla logica.

La nozione di regolarità di un ultrafiltro ha anche applicazioni alla Topologia.

Mentre è ben noto che il prodotto di spazi topologici compatti è ancora compatto, questa conservazione rispetto a prodotti non vale necessariamente per proprietà di compattezza più deboli; per esempio non vale per la compattezza numerabile ("per ogni ricoprimento aperto numerabile esiste un sottoricoprimento finito"). Una forma ancor più generale di compattezza ($[\lambda,\mu]$-compattezza, dipendente da due parametri) era stata introdotta da Alexandroff and Urysohn già nel 1929. Nel lavoro **[5]**, usando gli ultrafiltri, si caratterizzano gli spazi topologici per i quali tutte le potenze sono $[\lambda,\mu]$-compatte.

In **[15]** si danno vari esempi del seguente fenomeno: se un prodotto di spazi topologici soddisfa ad una certa proprietà di compattezza, allora tutti i fattori, tranne al più un certo numero, soddisfano ad una proprietà di compattezza più forte.

Ulteriori risultati che collegano la Teoria degli Ultrafiltri, la Topologia e la Teoria dei Modelli sono presentati nella serie di preprint [36].

1.2 Elenco completo delle pubblicazioni

1.2.1 Articoli pubblicati su riviste estere

[1] Duality for compact logics and substitution in abstract model theory. *Z. Math. Logik Grundlag. Math.* 31 (1985), n. 6, 517-532.

[2] Limit ultrapowers and abstract logics. *J. Symbolic Logic* 52 (1987), n. 2, 437-454.

[3] Commutator theory without join-distributivity. *Trans. Amer. Math. Soc.* 346 (1994), n. 1, 177-202.

[4] n-permutable varieties satisfy nontrivial congruence identities. *Algebra Universalis* 33 (1995), n. 2, 159-168.

[5] Productive $[\lambda,\mu]$-compactness and regular ultrafilters. *Topology Proc.* 21 (1996), 161-171.

[6] Ultrafilter translations. I. (λ,λ)-compactness of logics with a cardinality quantifier. *Arch. Math. Logic* 35 (1996), n. 2, 63-87.

[7] A characterization of varieties with a difference term. *Canad. Math. Bull.* 39 (1996), n. 3, 308-315.

[8] A characterization of varieties with a difference term. II. Neutral=meet semi-distributive. *Canad. Math. Bull.* 41 (1998), n. 3, 318-327.

[9] A Kiss 4-difference term from a ternary term. *Algebra Universalis* 42 (1999), 153-154.

[10] Congruence modularity implies the Arguesian law for single algebras with a difference term. *J. Algebra* 219 (1999), 658-681.

[11] Every (λ^+,κ^+)-regular ultrafilter is (λ,κ)-regular. *Proc. Amer. Math. Soc.* 128 (2000), 605-609.

[12] A non-trivial congruence implication between identities weaker than modularity. *Acta Sci. Math. (Szeged)* 68 (2002), 593-609.

[13] Optimal Mal'tsev conditions for congruence modular varieties (con G. Czedli ed E. Horvath), ***Algebra Universalis*** **53 (2-3) (2005) 267-279.**

[14] A local proof for a tolerance intersection property, *Algebra Universalis* 54 (3) (2005) 273-277.

[15] Compact factors in finally compact products of topological spaces, *Topology and its Applications* Vol. 153 (9) (2006) 1365-1382.

[16] From congruence identities to tolerance identities, ***Acta Sci. Math. (Szeged)*** **Vol. 73 (2007), 31-51.**

[17] Every m-permutable variety satisfies the congruence identity $ab_h=ag_h$, ***Proc. Amer. Math. Soc.*** **136 (2008), no. 4, 1137--1144.**

[18] Terms which are Mal'cev modulo some functions, *Algebra Universalis* 58 (2008) 249-262.

1.2.2 Articoli pubblicati su Atti di Convegni Internazionali e su volumi.

[19] Compactness properties of logics generated by monadic quantifiers and cardinalities of limit ultrapowers. Proceedings of the third Easter conference on model theory (Gross Köris, 1985), 183-185, *Seminarberichte*, 70, Humboldt Univ., Berlin, 1985.

[20] About some generalizations of (λ,μ)-compactness. Proceedings of the fifth Easter conference on model theory (Wendisch Rietz, 1985), 139-141, *Seminarberichte,* 93, Humboldt Univ., Berlin, 1987.

[21] Compactness of cardinality logics and constructibility. Proceedings of the tenth Easter conference on model theory (Wendisch Rietz, 1993), 130-133, *Seminarberichte*, 93-1, Humboldt Univ., Berlin, 1993.

[22] Voce relativa all'opera *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre* di Georg Cantor, nell'aggiornamento al *Dizionario Bompiani delle Opere e dei Personaggi di tutti i tempi e di tutte le Letterature.*

[23] Tolerance intersection properties and subalgebras of squares. Logic Colloquium 2004, 109--122*, Lect. Notes Log*. 29, Assoc. Symbol. Logic, Chicago 2008.

1.2.3 Articoli pubblicati su riviste nazionali

[24] Existentially complete closure algebras. *Boll. Un. Mat. Ital.* D (6) 1 (1982), n. 1, 13-19.

[25] Locally finite theories with model companion. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8) 72 (1982), n. 1, 6-11.

[26] Some results about compact logics. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur*. (8) 72 (1982), n. 6, 308-311.

[27]An application of commutator theory to incidence algebras. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8) 76 (1984), n. 2, 85-87.

[28] Robinson equivalence relations through limit ultrapowers. *Boll. Un. Mat. Ital*. B (6) 4 (1985), n. 2, 569-583.

[29] Consequences of compactness properties for abstract logics. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.* (8) 80 (1986), n. 7-12, 501-503.

[30] The compactness spectrum of abstract logics, large cardinals and combinatorial principles. *Boll. Un. Mat. Ital*. B (7) 4 (1990), n. 4, 875-903.

[31] Congruence identities satisfied in n-permutable varieties. *Boll. Un. Mat. Ital.* B (7) 8 (1994), n. 4, 851-868.

1.2.4 Preprint[3]

[32] Finitely based congruence varieties (in collaborazione con Ralph Freese).

[33] An elementary proof that n-permutable varieties satisfy identities.

[34] More on regular ultrafilters in ZFC, in corso di revisione per *Mathematical Logic Quarterly*.

[35] Towards commutator theory for relations I, II, III, IV.

---

[3] Scaricabili (eccetto [32]) dal sito internet **http://www.mat.uniroma2.it/~lipparin** oppure da **http://arxiv.org/find/grp_math/1/AND+au:+lipparini+au:+paolo/0/1/0/all/0/1**.

[36] Combinatorial and model-theoretical principles related to regularity of ultrafilters and compactness of topological spaces. I, II, III, IV.

[37] Decomposable ultrafilters and possible cofinalities, accettato da *Notre Dame Journal of Formal Logic.*

1.3 Borse di studio

1980-1981	Borsa INdAM di Avviamento alla Ricerca (fruita interamente per una annualità)
1983	Borsa INdAM di Ricerca (borsa annuale, ma fruita per soli due mesi poiché nel frattempo risultato vincitore di Concorso per Ricercatore)

1.4 Referee

Svolge regolarmente attività di referee per la rivista *Algebra Universalis*, e, occasionalmente, per *Acta Sci. Math. (Szeged), Rendiconti Lincei: Matematica e Applicazioni,* e altre riviste.

1.5 Partecipazioni a Convegni Internazionali

- Logic Colloquium '82, Firenze, luglio 1982.
- Conference on quasigroups, Varese, luglio 1983.
- Meeting on Stability in Model Theory, Cognola (Trento), luglio 1984.
- 3rd Easter Conference on Model Theory, Berlino, aprile 1985.
- 32 Arbeitstagung über Allgemeine Algebra, Salisburgo, maggio 1986.
- 5th Easter Conference on Model Theory, Berlino, aprile 1987.
- 2nd Meeting on Stability in Model Theory, Cognola (Trento), luglio 1987.
- Logic Colloquium '88, Padova, agosto 1988.
- Order in Algebra and Logic, Napoli, febbraio 1991.
- Symposium on Lattice Theory and applications, Darmstadt, luglio 1991.
- 3rd Meeting on Stability in Model Theory, Cognola (Trento), luglio 1991.
- 10th Easter Conference on Model Theory, Berlino, aprile 1993.
- International Conference on Logic and Algebra in Memory of Roberto Magari, Siena, aprile 1994.
- International Congress on Logic, Philosophy and Methodology of Science, Firenze, agosto 1995.
- Conference on Universal Algebra and Lattice Theory, Szeged, luglio 1996.

- Conference on Lattices and Universal Algebra, Szeged, agosto 1998.
- Logic Colloquium ’98, Praga, agosto 1998.
- Mathematics Towards the Third Millennium, Roma, giugno 1999.
- Conference in Algebra in honour of the 70th birthday of Ervin Fried, Budapest, agosto 1999;
- 1° Joint Meeting AMS-UMI, Pisa, luglio 2002 ("Invited speaker", special session 51).
- Logic Colloquium 2004, Torino, luglio 2004 (“Invited speaker”, special session on universal algebra).
- 76 Arbeitstagung Allgemeine Algebra Linz (Austria), maggio 2008.
- UltraMath 2008 Applications of Ultrafilters and Ultraproducts in Mathematics Pisa, giugno 2008.

Nella quasi totalità dei casi ha tenuto comunicazioni di carattere scientifico.

Ha partecipato inoltre a numerosi convegni di carattere nazionale.

È stato invitato a tenere seminari presso l'Università di Varsavia (ottobre-novembre 1988).

Ha tenuto seminari anche nelle Università di Firenze, Roma Tor Vergata, Roma La Sapienza, Siena.

1.5.1 “Invited speaker”

- È stato “invited speaker” nella Sessione 51 (Algebraic Logic and Universal Algebra) del 1° “Joint Meeting” dell'American Mathematical Society e dell'Unione Matematica Italiana, Pisa, luglio 2002.

- È stato “invited speaker” nella Special Session on Universal Algebra al Logic Colloquium 2004, Torino, luglio 2004.

2. ATTIVITÀ DIDATTICA

2.1 Stato di servizio

È stato insegnante presso l'Istituto Tecnico Statale "Luigi Einaudi" di Muravera (CA) dal 10 gennaio 1983 all' 1 settembre 1983 (Cattedra di Matematica).

È ricercatore dal 15 marzo 1984 (ai fini giuridici).
Ha preso servizio l'8 ottobre 1984 presso la Facoltà di Scienze M.F.N. della II Università di Roma (Tor Vergata), per il gruppo disciplinare n. 89 (attualmente per il raggruppamento MAT/01), afferente al Dipartimento di Matematica.
È confermato a decorrere dall'8 ottobre 1987 (decorrenza giuridica), e ha sempre optato per il regime di tempo pieno.

2.2 Esercitazioni

A.A. 1984-1985 Algebra *(Corso di Laurea in Matematica)*
A.A. 1985-1986 Algebra *(Corso di Laurea in Matematica)*
A.A. 1986-1987 Algebra *(Corso di Laurea in Matematica)*
A.A. 1987-1988 Algebra *(Corso di Laurea in Matematica)*
Geometria I *(Corso di Laurea in Matematica)*
A.A. 1988-1989 Geometria I *(Corso di Laurea in Matematica)*
Istituzioni di Matematica *(Corso di Laurea in Biologia)*
A.A. 1989-1990 Algebra *(Corso di Laurea in Matematica)*
Geometria *(Corso di Laurea in Fisica)*
A.A. 1990-1991 Geometria *(Corso di Laurea in Fisica)*
A.A. 1991-1992 Algebra *(Corso di Laurea in Matematica)*
A.A. 1992-1993 Algebra *(Corso di Laurea in Matematica)*
A.A. 1993-1994 Algebra *(Corso di Laurea in Matematica)*
A.A. 1995-1996 Geometria *(Corso di Laurea in Fisica)*
A.A. 1996-1997 Geometria *(Corso di Laurea in Fisica)*
A.A. 1997-1998 Geometria *(Corso di Laurea in Fisica)*
A.A. 1998-1999 Geometria *(Corso di Laurea in Fisica)*
A.A. 1999-2000 Geometria *(Corso di Laurea in Fisica)*
A.A. 2000-2001 Geometria I *(Corso di Laurea in Matematica)*
Geometria III *(Corso di Laurea in Matematica)*
A.A. 2001-2002 Geometria 3 *(Corso di Laurea in Matematica)*
Matematica Discreta II *(Corso di Laurea in Informatica)*

A.A. 2002-2003 Algebra II *(Corso di Laurea in Matematica)*
Matematica Discreta I *(Corso di Laurea in Informatica)*
A.A. 2003-2004 Matematica Discreta I *(Corso di Laurea in Informatica)*
A.A. 2004-2005 Matematica Discreta *(Corso di Laurea in Informatica)*
Geometria I *(Corso di Laurea in Fisica)*
A.A. 2005-2006 Matematica Discreta *(Corso di Laurea in Informatica)*
Geometria I *(Corso di Laurea in Fisica)*
A.A. 2006-2007 Matematica Discreta *(Corso di Laurea in Informatica)*
Geometria I *(Corso di Laurea in Fisica)*
A.A. 2007-2008 Matematica Discreta *(Corso di Laurea in Informatica)*
Geometria I *(Corso di Laurea in Fisica)*

A partire dall'A.A. 2001-2002, come attività di esercitatore, oltre alle consuete ore di lezione in aula, ha realizzato materiale didattico in supporti informatici. In particolare, in collaborazione coi Titolari del Corsi, ha approntato liste di esercizi consultabili via Internet, la cui soluzione veniva comunicata successivamente.

In questo modo anche quegli studenti che, per varie ragioni, non potevano seguire con continuità le lezioni, in particolare gli studenti lavoratori, hanno avuto la possibilità di preparare e sostenere con successo la prova di esame, talvolta in maniera particolarmente brillante.

2.3 Corso di dottorato

A.A. 2007-2008 Corso di *Set Theory*, per il Corso di Dottorato in Matematica, Dipartimento di appartenenza.

2.4 Supplenze (o Incarichi, Affidamenti etc. etc.)

A.A. 1993-1994 Supplenza retribuita (effettivamente retribuita) di Logica Matematica, presso la Facoltà di appartenenza.

A.A. 1999-2000 Supplenza di Logica Matematica (II modulo semestrale), presso la Facoltà di Scienze Mat. Fis. Nat. dell'Università di Cagliari.

A.A. 2000-2001 Supplenza di Logica Matematica (II modulo semestrale), presso la Facoltà di Scienze Mat. Fis. Nat. dell'Università di Cagliari.

A.A. 2001-2002 Supplenza di Logica Matematica (I modulo semestrale), presso la Facoltà di Scienze Mat. Fis. Nat. dell'Università di Cagliari.

A.A. 2002-2003 Affidamento di Matematiche Complementari II (5 crediti), presso la Facoltà di appartenenza.

A.A. 2002-2003 Supplenza di Logica Matematica 2 (6 crediti) presso la Facoltà di Scienze Mat. Fis. Nat. dell'Università di Cagliari.

A.A. 2003-2004 Supplenza di Matematica Zero presso la Facoltà di appartenenza.

2.5 Relatore di Tesi di Laurea.

- *Il Programma di Hilbert e suoi recenti sviluppi*, Tesi di I. Lavatore, A.A. 1999-2000.

- *Recenti risultati in Aritmetica Cardinale*, Tesi di C. Contu, A.A. 2007-2008.