

# LOGICA MATEMATICA E VALORE DELLA SCIENZA

Paolo Lipparini

(da *Omaggio a Piero Mangani*, a cura di Annalisa Marcja, Quaderni del Dipartimento di Matematica "Ulisse Dini" 2002-12, Firenze, Giugno 2002)

Oggi non vorrei parlare di questioni tecniche; vorrei invece trarre lo spunto dall'articolo di Piero su Lettera Pristem per alcune riflessioni sul problema del Valore della Scienza.

Nessuno mette in dubbio la capacità umana di raggiungere obiettivi pratici, anche molto ambiziosi: la vera questione è se sia possibile la conoscenza, e se la scienza ci possa aiutare a raggiungerla.

Non voglio annoiarvi qui con la mia personale opinione; più modestamente, vorrei sostenere una piccola tesi che comunque ci riguarda, e cioè che

*La logica matematica ha ancora qualcosa da dire sul problema del valore della scienza*

(e che, per inciso, sarebbe un'occasione sprecata, sotto tutti i punti di vista, perdere l'occasione di discuterne).

Le stesse discussioni dell'inizio del secolo sui fondamenti, almeno leggendo alcuni scritti di Hilbert, andrebbero interpretate non come una sterile disputa fra varie scuole di pensiero, ma come un tentativo, ingenuo o maldestro se si vuole, di difesa proprio della scienza e non tanto della sola matematica, quest'ultima presa in considerazione piuttosto per il suo ruolo speciale e, direi, per il suo carattere paradigmatico (vedi, ad esempio, il recentissimo volume di Simpson sui sottosistemi dell'Aritmetica del second'ordine). Visto al di fuori di questo contesto, il problema dei fondamenti perde gran parte del suo significato; e del resto, come un qualunque testo appena appena scaltrito non manca di notare, nessuno ha mai spiegato con esattezza il significato della parola "fondamenti".

Che il ruolo della logica matematica sia tutt'altro che esaurito, nelle discussioni sulla scienza, è provato dal fatto che sono più vive che mai le discussioni sul Teorema (di incompletezza) di Gödel e sul suo "significato": vedi ad esempio il libro di Penrose (*The Emperor's new Mind*), e il dibattito che ne è seguito.

Sicuramente il Teorema di Gödel pone dei limiti alla nostra possibilità di conoscere con certezza: la formula indecidibile di Gödel è senza dubbio intuitivamente vera, ma solo a patto che l'Aritmetica, o comunque la teoria in cui si sta dimostrando il teorema, si assuma non contraddittoria, e questa è un'ipotesi non dimostrabile<sup>1</sup>. È significativo, al riguardo, il tentativo di Simpson di sdrammatizzare la situazione sostenendo che almeno l'85% della matematica risulterebbe immune

---

<sup>1</sup> Vedi P. Pudlak, A note on applicability of the incompleteness theorem to human mind, *Annals of Pure and Applied Logic*, 96 (1999), 335-342.

dai risultati di indecidibilità. Partendo da presupposti totalmente diversi, anche Woodin, nei suoi articoli sui Notices AMS di Giugno-Agosto 2001 ventila la possibilità che gli enunciati indecidibili del tipo di quelli forniti dal Teorema di Gödel siano essenzialmente le uniche affermazioni matematiche non decidibili, in un senso che può essere reso molto preciso (anche se tecnicamente davvero sofisticato).

Ma sarebbe limitativo (e forse in realtà un po' "datato") fermarsi al Teorema di Gödel. L'eccessiva specializzazione, la frammentazione, e la stessa mole di scoperte, ancorchè importanti e significative, rendono difficile afferrare bene le nuove relazioni che legano la matematica e le altre scienze. Oggi più che mai, forse, è giusto sostenere che "il gran libro della natura è scritto in caratteri matematici"; purtroppo, uno sguardo frettoloso alla fisica moderna rende ancor più misterioso cosa debba intendersi per "libro della natura"; e cosa sia la matematica, ormai, nessuno più lo sa...

Paradossalmente, da un lato si assiste al controsenso di matematici che, in nome del concreto e del "calcolabile", quasi ripudiano concetti fondamentali ritenuti troppo astratti (ad esempio la topologia, o l'algebra), mentre i fisici fanno un uso sempre più esteso di quegli stessi concetti astratti. Si pensi solo al caso dell'Analisi non standard: di sicuro i matematici in generale non la vedono di buon occhio, o al massimo la considerano come un semplice espediente formale, o magari una sistemazione utile dal punto di vista didattico<sup>2</sup>, mentre sembra che alcuni fisici importanti l'abbiano apprezzata parecchio.

La sistemazione attuale dei concetti di base dell'analisi (limite, derivata...) fa implicitamente riferimento a teorie o assunzioni di tipo fisico "classico", che però sono in contrasto con le teorie fisiche moderne. Per esempio, si può pensare alla derivata come alla "velocità" con cui avviene un fenomeno, e questo può fornire una giustificazione della nozione di derivata in termini di fisica ottocentesca. Ma nella meccanica quantistica la nozione di velocità perde generalmente il suo senso fisico (nonostante le derivate vengano comunque abbondantemente usate).

Sempre riferendosi alle teorie fisiche moderne, si potrebbe mettere in dubbio l'affermazione che "i numeri reali sono i numeri delle scienze naturali". E, comunque, perchè non dare una connotazione di "realtà" anche ad altri tipi di numeri? o, al contrario, perchè non limitarsi all'insieme (finito o tutt'al più numerabile) delle quantità effettivamente usate? Se non altro, i risultati di indipendenza in teoria degli insiemi, così invisibili ai matematici, mostrano che abbiamo un'idea tutt'altro che chiara di cosa sia l'insieme dei reali.

Se mi si permette una previsione un po' azzardata, non è affatto scontato che l'analisi resterà sempre basata sull'impostazione "classica" datale da Cauchy, Weierstrass etc.; in questo senso, l'Analisi non standard potrebbe rappresentare niente di più che la punta di un iceberg. Se vi saranno dei cambiamenti nell'impostazione dell'analisi, sicuramente la logica matematica vi avrà un ruolo di primo piano. E, chissà, tutto questo potrebbe comportare un ripensamento su cosa debba intendersi per scienza, e su quale valore debba essere ad essa attribuito.

---

<sup>2</sup> In effetti, l'atteggiamento dei matematici nei confronti dell'Analisi non standard sembra stia diventando un po' più benevolo.