Università di Roma Tor Vergata

Ingegneria Gestionale, Meccanica ed Energetica - Geometria

TUTORATO 7 - 16 Maggio 2024

1. Stabilire quali delle seguenti applicazioni sono lineari.
   (a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definita da $f(x, y) = (x - y, x + 2y, x + 2)$
   (b) $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x, y, z) = x^2 + y$
   (c) $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definita da $h(x, y, z) = (x + y + z, 3x)$
2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $f(x, y) = (x + y, 2x, x - y)$.
   (a) Calcolare $f(0, 0)$, $f(1, 2)$ e $f(0, 3)$.
   (b) Determinare una base e la dimensione di $Ker(f)$ e $Im(f)$.
   (c) Dire se f è iniettiva. Dire se è surriettiva.
3. Sia $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $f(x, y, z, t) = (x + 2y - t, 2x + y + t, x - y + 2t)$
   (a) Dire se $u = (0, 1, 0, 1)$ appartiene a $Ker(f)$. Dire se $w = (1, 1, 0)$ appartiene a $Im(f)$.
   (b) Determinare una base e la dimensione di $Ker(f)$ e $Im(f)$.
   (c) Dire se f è iniettiva. Dire se è surriettiva.
4. Sia f l'*endomorfismo* di $\mathbb{R}^3$ (ovvero un'applicazione lineare in cui dominio e codominio coincidono) definito da $f(x, y, z) = (3x - 2y, x + y + z, 2x - 3y - z)$.
   (a) Determinare una base e la dimensione di $Ker(f)$ e $Im(f)$.
   (b) Stabilire se f è un *isomorfismo*, ovvero un endomorfismo invertibile di $\mathbb{R}^3$.
5. (Applicazione nello spazio delle matrici) Sia $M_{2,2}$ lo spazio delle matrici reali 2×2. Si consideri l'applicazione lineare $T : M_{2,2} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da:
$$T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 2a + 2d$$
   (a) Determinare $T^{-1}(2)$, ovvero la *controimmagine* di 2.
   (b) Determinare una base e la dimensione di $ker(T)$ e di $Im(T)$.
6. Sia F l'endomorfismo di $M_{2,2}$ definito da:
$$F \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -c \\ -b & d \end{pmatrix}$$
   (a) Dire se F è un isomorfismo.
   (b) Trovare una base e la dimensione del sottospazio $\{A \in M_{2,2} \text{ tale che } F(A) = A\}$.