Mock Compito di Geometria I

Esercizio 1 Sia $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$ e sia $W = \left\{A \in V : A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ e $Z = \{A \in V : A = A^t\}$

1. Calcolare una base di $W \cap Z$ e esibire un vettore $W + Z$ ma non in $W \cup Z$.
2. Per quali dei seguenti insiemi W_i, si ha che $W_i \cap Z$ é un sottospazio di Z? Motivare
   $W_1 = \{A \in V : \text{rg}(A) \leq 1\}$, $W_2 = \left\{A \in V : A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

1) La generica matrice di Z è della forma $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ con $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$

Appartiene anche a W se e solo se $\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & 2(a+c)-2b \\ b+e & 2(b+e)-2d \\ c+f & 2(c+f)-2e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a+c=0 \\ 2(a+c)-2b=0 \\ b+e=0 \\ 2(b+e)-2d=0 \\ c+f=0 \\ 2(c+f)-2e=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ d=0 \\ e=0 \\ b+e=0 \\ a+c=0 \\ c+f=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a=f \\ b=0 \\ c=-f \\ d=0 \\ e=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \in \text{Span}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quindi una base di $W \cap Z$ è $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$

Per trovare un vettore in $W+Z$ ma non in $W \cup Z$ basta considerare una matrice $w+z$ con $w \in W$ e $w \notin W \cap Z$ e $z \in Z$ e $z \notin Z \cap W$

(infatti, se per assurdo $w+z \in W$, allora esiste $w' \in W$ tale che $w+z = w' \Rightarrow z = w'-w \in W \Rightarrow z \in Z \cap W$. Analogamente sarebbe assurdo $w+z \in Z$)

Per esempio $w = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $\underline{w+z = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

2) $W_1 \cap Z$ <u>no</u> perché non è chiuso per somma:

infatti $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sono in $W_1 \cap Z$ ma la loro somma $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è in $W_1 \cap Z$.

$W_2 \cap Z$ <u>no</u> perché non contiene $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_V$

(infatti $0_V \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 2 Nello spazio $\mathbb{R}^3$ guardiamo le rette $r = \begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ y-z=1 \end{cases}$, $s_k = \begin{pmatrix}1\\2\\k\end{pmatrix}$ +Span $\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

1. Al variare del parametro k, dire se le rette sono parallele e calcolare l'insieme

$$r+s=\{R+S|R\in r, S\in s\}.$$

2. Nel caso $k=2$ dire se esiste una trasformazione lineare di $\mathbb{R}^3$ che manda s in r.

1) r e s hanno giaciture $r' = \begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ e $s' = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ che sono diverse, infatti $\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ non appartiene a r', infatti non soddisf[a] le equazioni di r'. Due rette sono parallele se e solo se hanno la stessa giacitura, quindi per ogni k, r e s __non__ sono parallele. Inoltre $r' = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ e, visto che $\begin{pmatrix}-5/2\\2\\1\end{pmatrix}$ è un punto di r, allora $r = \begin{pmatrix}-5/2\\2\\1\end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$. Quindi, esplicitando le forme parametriche

$$r+s = \left\{ \begin{pmatrix}-5/2\\1\\1\end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\\k\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} \,\middle|\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}-3/2\\3\\1+k\end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} \,\middle|\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\} = \begin{pmatrix}-3/2\\3\\1+k\end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\right)$$

ed è un piano affine.

2) Data $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineare si ha.

$$F(s) = \left\{ F\left(\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\right) \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ F\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + t\, F\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} = \ldots$$

$$= F\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(F\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}\right).$$

Quindi per mandare s in r basterebbe che $F\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5/2\\2\\1\end{pmatrix}$ e $F\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ visto che $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ sono lin. indipendenti, una tale F esiste (per trovare un esempio: $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$ e quindi esiste (un'unica) F lineare che manda $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-5/2\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}^2$)

Esercizio 3 Sia $F\colon \mathbb{C}^3 \to V = \{p(t) \in \mathbb{C}[t] : \deg p \leq 3\}$ la funzione $F(a,b,c) = a(t+1) - (b+c)t^3$, e sia $G\colon V \to V$ la funzione $G(p(t)) = p'(t) + p(t)$

1. Calcolare basi dell'immagine e del kernel di $G \circ F$
2. Sia $W = \{p \in V : p(1) = 0\}$. Dimostrare che $F^{-1}(W)$ é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^3$ e calcolarne la dimensione

① Dalle formule

$$G\circ F(a,b,c) = G(a(t+1)-(b+c)t^3) = a(t+1+1)-(b+c)(t^3+3t^2) =$$
$$= a(t+2)-(t^3+3t)(b+c)$$

In particolare $\operatorname{Im}(G\circ F) = \operatorname{Span}(G\circ F(e_1), G\circ F(e_2), G\circ F(e_3))$

$$= \operatorname{Span}(t+2, -(t^3+3t), -(t^3+3t^2))$$

e quindi, essendo $t+2$ e (t^3+3t^2) indipendenti, $\{t+2,\ t^3+3t^2\}$ è una base dell'immagine

$$\operatorname{Ker}(G\circ F) = \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \mid G\circ F(a,b,c) = 0\} =$$
$$\{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \mid a(t+2)-(b+c)(t^3+3t^2) = 0\} =$$ per l'indipendenza di $t+2$ e t^3+3t^2
$$\{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \mid a = 0 = b+c\} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$ è base del Kernel

② $$F^{-1}(W) = \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \mid F(a,b,c) \in W\} = \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 : a(t+1)-(b+c)(t^3) \in W\}$$
$$= \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \mid a(1+1)-(b+c)(1^3) = 0\}$$
$$= \{(a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \mid 2a-b-c = 0\}$$

che è un sottospazio di $\mathbb{C}^3$ perché è definito da un'equazione lineare omogenea e, visto che questa equazione è non-nulla, allora per Rouché-Capelli, $F^{-1}(W)$ ha dimensione $3-1 = 2$

oss Una soluzione alternativa è trovare L nella base canonica "risolvendo" per $L(e_i)$ in ★

oss2 Ci sono altre L_A che funzionano, ne ho presa una

Esercizio 4 In $\mathbb{R}^3$ consideriamo il sottospazio $V = \text{Span}(e_1 + e_2, e_2 + e_3)$. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare che lascia fissi i vettori di V e manda e_3 in $e_3 + e_1 + e_2$

1. Quante sono le possibili L? Discutere la diagonalizzabilitá delle possibili L e eventualmente trovare una base diagonalizzante.

2. Per alemeno una L, trovare una matrice A di rango 2 tale che $L \circ L_A$ sia diagonalizzabile.

① Per linearitá L lascia fissi tutti i vettori di V se e solo se lascia fissa una sua base. Quindi le possibili L sono quelle che soddisfano

$$\begin{cases} L(e_1+e_2) = e_1+e_2 \\ L(e_2+e_3) = e_2+e_3 \\ L(e_3) = e_1+e_2+e_3 \end{cases} \quad ★$$

Visto che $\{b_1 = e_1+e_2,\ b_2 = e_2+e_3,\ b_3 = e_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ allora per quanto fatto a lezione esiste <u>una unica tale L</u>.

Inoltre ★ si puó riscrivere come $\begin{cases} L(b_1) = b_1 \\ L(b_2) = b_2 \\ L(b_3) = b_1+b_3 \end{cases}$

e quindi $[L]_{\{b_1,b_2,b_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. In particolare

$P_L(t) = (t-1)^3$ quindi l'autovalore 1 ha molteplicitá algebrica 3. Invece la molteplicitá geometrica è

$m_g(1) = \dim \ker(L - \text{Id}) = \dim\left(\ker\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 2 \neq m_a(1)$

$\Rightarrow L$ <u>non</u> è diagonalizzabile.

② Basta prendere l'unica L_A tale che $[L_A]_{\{b_1,b_2,b_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

affinché $[L \circ L_A]_{\{b_1,b_2,b_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ che è diagonale.

D'altro canto $[L_A]_{b_1,b_2,b_3} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} L_A(e_1+e_2) = L_A(e_1) + L_A(e_2) = e_1+e_2 \\ L_A(e_2+e_3) = L_A(e_2) + L_A(e_3) = e_2+e_3 \\ L_A(e_3) = 0 \end{cases}$

Risolvendo il sistema in $L_A(e_1)$, $L_A(e_2)$ e $L_A(e_3)$, troviamo $\begin{cases} L_A(e_3) = 0 \\ L_A(e_2) = e_2+e_3 \\ L_A(e_1) = (e_1+e_2) - (e_2+e_3) = e_1 - e_3 \end{cases}$

quindi $A = [L_A]_{\{e_1,e_2,e_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$