Mock Compito di Geometria I

Esercizio 1 Sia $V = \mathbb{R}^{3\times 3}$ e sia $W = \left\{ A \in V : A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ e $Z = \{A \in V : A = A^t\}$

1. Calcolare una base di $W \cap Z$ e esibire un vettore $W + Z$ ma non in $W \cup Z$.
2. Per quali dei seguenti insiemi W_i, si ha che $W_i \cap Z$ é un sottospazio di Z? Motivare $W_1 = \{A \in V : \mathrm{rg}(A) \leq 1\}$, $W_2 = \left\{ A \in V : A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Esercizio 2 Nello spazio $\mathbb{R}^3$ guardiamo le rette $r = \begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ y - z = 1 \end{cases}$, $s_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix} + \mathrm{Span} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

1. Al variare del parametro k, dire se le rette sono parallele e calcolare l'insieme

$$r + s = \{R + S | R \in r, S \in s\}.$$

2. Nel caso $k = 2$ dire se esiste una trasformazione lineare di $\mathbb{R}^3$ che manda s in r.

Esercizio 3 Sia $F\colon \mathbb{C}^3 \to V = \{p(t) \in \mathbb{C}[t] : \deg p \leq 3\}$ la funzione $F(a,b,c) = a(t+1) - (b+c)t^3$, e sia $G\colon V \to V$ la funzione $G(p(t)) = p'(t) + p(t)$

1. Calcolare basi dell'immagine e del kernel di $G \circ F$
2. Sia $W = \{p \in V\colon p(1) = 0\}$. Dimostrare che $F^{-1}(W)$ é un sottospazio vettoriale di $\mathbb{C}^3$ e calcolarne la dimensione

Esercizio 4 In $\mathbb{R}^3$ consideriamo il sottospazio $V = \text{Span}(e_1 + e_2, e_2 + e_3)$. Sia $L\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare che lascia fissi i vettori di V e manda e_3 in $e_3 + e_1 + e_2$

1. Quante sono le possibili L? Discutere la diagonalizzabilitá delle possibili L e eventualmente trovare una base diagonalizzante.

2. Per almeno una L, trovare una matrice A di rango 2 tale che $L \circ L_A$ sia diagonalizzabile.