Università di Roma Tor Vergata

Ingegneria Gestionale, Meccanica ed Energetica - Geometria

TUTORATO 9 - 30 Maggio 2024

1. Siano A e B due matrici 2×2:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$
   (a) Calcolare il determinate di A e B.
   (b) Calcolare il determinante di A^T, B^T, AB, $A + B$.

2. Calcolare il determinate delle seguenti matrici 3×3:
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Calcolare, ricorrendo dove possibile alle sue proprietà, il determinante delle seguenti matrici 4×4:
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} A_3 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

4. (Calcolo del rango con il *Teorema degli Orlati*) Determinare il rango delle seguenti matrici al variare del parametro reale k.
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ 0 & k+1 & -1 \\ 0 & 0 & k-2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k & 1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & k \\ k & k+1 & 0 \end{bmatrix},$$

5. Dire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ il seguente sistema in tre variabili ammette un'unica soluzione.
$$\begin{cases} x - 4y + 2z = 0 \\ x + (t+1)y - z = 1 \\ -2y + (t-3)z = 1 \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$$

6. Risolvere il seguente sistema lineare con la *regola di Cramer*
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + z = 5 \\ x + 2y - 2z = 6 \end{cases}$$

7. Siano A e B matrici quadrate di ordine n e sia I la matrice identità . Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false:
   (a) Se AB è invertibile allora A e B sono invertibili.
   (b) Se $A^{-1} = A^T$, allora $det(A) = \pm 1$.
   (c) Se $det(AB) = det(B)$ allora $A = I$.