Università di Roma Tor Vergata

Ingegneria Gestionale, Meccanica ed Energetica - Geometria

TUTORATO 8 - 23 Maggio 2024

1. (Matrice Inversa) Calcolare, tramite il metodo di Gauss, l'inversa delle seguenti matrici:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

2. Sia $S : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da $S(x, y, z) = (2x-y+z, -2x+2y-3z, -2x+2y+z)$
   (a) Determinare una base e la dimensione di $Ker(S)$ e $Im(S)$.
   (b) Dire se S è un *endomorfismo invertibile*.
   (c) Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$ e sia $\mathcal{B}$ la base di $\mathbb{R}^3$ costituita dai vettori $v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (1, 0, 1), v_3 = (0, 1, 1)$. Si determini la matrice $M_{\mathcal{B}\mathcal{E}}(S)$ associata a S.

3. Si consideri il seguente endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ definito da $F(x, y, z, w) = (-x + z, 2y, x - 2z, w)$
   (a) Trovare una base e le dimensioni di $Im(f)$ e $Ker(f)$.
   (b) Stabilire se F è un *endomorfismo invertibile*.
   (c) Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^4$. Determinare la matrice $M = M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(F)$ associata a F. Calcolare $F(2, -1, 1, 0)$ utilizzando la matrice M.
   (d) Sia $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1)\}$ una base di $\mathbb{R}^4$. Determinare la matrice $M' = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(F)$ associata a F.

4. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione definita da $f(x, y) = (2x, x - y, 2y)$, e siano $\mathcal{B} = \{(1, 0), (1, 1)\}$ e $\mathcal{B}' = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$ due basi di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ rispettivamente.
   (a) Trovare la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi canoniche di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.
   (b) Trovare la matrice rappresentativa di f rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$.

5. Sia $\mathcal{B} = \{v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, -1, 0), v_3 = (2, 0, 0)\}$ una base di $\mathbb{R}^3$ e sia T l'endomorfismo di $\mathbb{R}^3$ così definito:

$$T(v_1) = (3, 1, 2), \ T(v_2) = (0, 1, 1), \ T(v_3) = (6, 4, 6)$$

   (a) Sia $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$. Si determini la matrice $M_{\mathcal{E}\mathcal{E}}(T)$ associata a T.
   (b) Determinare una base e la dimensione di $Im(T)$ e $Ker(T)$.
   (c) Si stabilisca per quali valori di k il vettore $v_k = (k + 1, 0, k)$ appartiene all'immagine di T.