

Università di Roma Tor Vergata
Ingegneria Gestionale, Meccanica ed Energetica - Geometria
TUTORATO 6 - 9 Maggio 2024

1. (Somma e intersezione di sottospazi) Si considerino i seguenti sottospazi di \mathbb{R}^4

$$U : \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3z - w = 0 \end{cases} \quad V = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

- (a) Trovare una base e la dimensione di U e di V .
(b) Trovare una base e la dimensione di $U \cap V$ e $U + V$, dire se la somma è diretta.
2. Determinare la posizione reciproca (cioè se sono *incidenti*, *parallele* o *sghembe*) delle seguenti rette:

$$r : \begin{cases} x - 3y = 2 \\ x + y - 2z = 6 \end{cases} \quad s : \begin{cases} y + 3z = 0 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

3. Determinare la posizione reciproca delle seguenti rette nello spazio e, se sono incidenti, calcolare l'ampiezza dell'angolo tra di esse

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = t + 1 \\ z = t + 3 \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = w \\ y = 2 \\ z = w + 2 \end{cases}$$

4. Sia r la retta di equazione $r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z + 1 = 0, 2x + 2y - z - 3 = 0\}$ e sia s la retta parallela a $(2, -1, 0)$ e passante per l'origine. Determinare la posizione reciproca di r e s .
5. (Sistema lineare in forma matriciale) Si consideri il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2t + 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

- (a) Calcolare il rango di A al variare di t .
(b) Determinare per quali valori del parametro reale t il sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ammette soluzione. In tali casi determinare esplicitamente le soluzioni in funzione di t .
6. (Sistema lineare parametrico) Si consideri il seguente sistema lineare parametrico in 3 variabili.

$$\begin{cases} kx + ky + 2kz = 4 \\ x + y + kz = k \\ x + 2y + 3z = 2k \end{cases}$$

- (a) Si dica per quali valori del parametro reale k il sistema ammette soluzioni.
(b) Esistono valori di k per i quali il sistema ha infinite soluzioni? In tali casi determinare le soluzioni.
7. (Estrazione base delle matrici) Determinare una base e la dimensione del seguente sottospazio di $M_{2,2}$:

$$U = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$