Università di Roma Tor Vergata

Ingegneria Gestionale, Meccanica ed Energetica - Geometria

TUTORATO 4 - 18 Aprile 2024

1. Si considerino i seguenti sottospazi (piani passanti per l'origine) in $\mathbb{R}^3$:
$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y = 0\}$$
$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y + z = 0\}$$
   (a) Determinare una base e la dimensione di U e di V.
   (b) Determinare una base e la dimensione di $U \cap V$. Di che *luogo geometrico* si tratta?
   (c) Usare la *formula di Grassman* per determinare la dimensione di $U + V$. Dire se U e V sono in *somma diretta*.

2. Si considerino i seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^3$:
$$U = span\{(1, 0, 0), (1, 2, 1)\}$$
$$V = span\{(0, 0, 1), (-3, 0, 0), (-3, 0, -3)\}$$
   (a) Determinare una base e la dimensione di U e di V.
   (b) Determinare una base e la dimensione di $U + V$.
   (c) Determinare la dimensione di $U \cap V$.

3. Sia $M_{2,2}$ lo spazio vettoriale delle matrici 2×2
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$
   (a) Calcolare $3A$, $A - 2B$, $A^T + B^T$, $(A + B)^T$.
   (b) Dire se A e B sono vettori linearmente indipendenti in $M_{2,2}$.

4. Fornire una base e la dimensione di
$$V = span\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \}$$

5. Sia $P_2[X]$ lo spazio vettoriale dei polinomi di grado minore o uguale a 2 e siano
$$p_1(x) = 1 + x, \; p_2(x) = x - x^2, \; p_3(x) = 1 + x^2.$$
   (a) Fornire una base $\mathcal{B}$ di $P_2[X]$. Osservare che $P_2[X]$ ha dimensione 3.
   (b) Dire se $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ sono vettori linearmente indipendenti.
   (c) Dire se $\{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$ è una base di $P_2[X]$.

6. Sia $U = \{A \in M_{2,2} : a_{11} + a_{22} = 0\}$, verificare che è un sottospazio di $M_{2,2}$. Fornire una base di U.

7. Data le matrice $M \in M_{2,3}$
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$
   (a) Scrivere il *sistema lineare omogeneo* $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ associato ad M.
   (b) Scrivere le equazioni cartesiane di $U \cap V$. Siano $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ due soluzioni di $M\mathbf{x} = 0$. Dire se $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ è anch'esso una soluzione. Dire se $\lambda\mathbf{x}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ è una soluzione. Dedurre che $Sol(M\mathbf{x} = \mathbf{0})$ è un sottospazio vettoriale.
   (c) Trovare una base e la dimensione di $Sol(M\mathbf{x} = \mathbf{0})$.