Università di Roma Tor Vergata

Ingegneria Gestionale, Meccanica ed Energetica - Geometria

TUTORATO 10 - 6 Giugno 2024

1. Verificare che $v = (1, 0, 0, 1)$ è un autovettore dell'endomorfismo T definito da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 - 2x_3, -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4, x_3, x_1 - 2x_3 + x_4)$$

   Determinare inoltre il relativo autovalore.

2. Sia $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$T(x, y, z) = (x, y + 3z, x + y - z)$$

   (a) Verificare che i vettori $v_1 = (0, 3, 1)$, $v_2 = (0, -1, 1)$ e $v_3 = (-1, 1, 0)$ sono degli autovettori di T e determinare i rispettivi autovalori.

   (b) Verificare che $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

   (c) Determinare la matrice $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(T)$ associata a T rispetto alla base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$.

3. Sia A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

   (a) Determinare il polinomio caratteristico $p_A(\lambda)$.

   (b) Determinare gli autovalori di A.

   (c) Per ogni autovalore $\lambda(A) \in \mathbb{R}$, determinare una base e la dimensione del suo *autospazio relativo*.

4. Si ripeta l'esercizio precedente con le matrici.

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \; E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

5. Dire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le matrici A e B sono *simili*. Ricorda: Se due matrici hanno gli stessi autovalori allora sono necessariamente *simili*.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

6. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $T : V \longrightarrow V$ una applicazione lineare tale che $T^2 = id$, dove id è l'*identità*.. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere o false.

   (a) T è un *endomorfismo invertibile*.

   (b) Gli autovalori di T sono 1 e -1.

   (c) $dim(Ker(T - id)) + dim(Ker(T + id)) = n$.