Nome e Cognome: ....

Durata: 2 ore. Non è possibile usare appunti o aiuti elettronici. Scrivere le soluzioni in questi fogli.

Esercizio 1 Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$

$$W_1 = \{\left(\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{smallmatrix}\right) \in V : a_{11} - a_{22} = 0\} \qquad W_2 = \{A \in V : A^t = -A\} \qquad W_3 = \{A \in V : A = A^t - \mathrm{Id}\}.$$

1. Quali tra W_3, W_2 e W_1 sono sottospazi vettoriali di V? Motivare la risposta.

2. Scegliere W_i e W_j che siano sottospazi, e calcolare una base di $W_i \cap W_j$ e di $W_i + W_j$.

1) W_1 e W_2 sono sottospazi vettoriali di V, W_3 non lo è.
W_1 è sottospazio vettoriale di V perché: 0) $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \in W_1$ in quanto $\overset{\text{coeff }(1,1)}{0} - \overset{\text{coeff }(2,2)}{0} = 0$
1) Se $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \in W_1$ e $\begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix} \in W_1$ anche $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix} \in W_1$ in quanto
$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a+e & b+f\\ c+g & d+h\end{pmatrix}$ e $(a+e)-(d+h) = (a-d)+(e-h) \underset{\uparrow}{=} 0+0=0$

$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}e&f\\g&h\end{pmatrix} \in W_1$

2) Se $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \in W_1$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ anche $\lambda\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \in W_1$
in quanto $\lambda\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda a & \lambda b\\ \lambda c & \lambda d\end{pmatrix}$ e $\lambda a - \lambda d = \lambda(a-d) \underset{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in W_1}{=} \lambda \cdot 0 = 0$

W_2 è un sottospazio vettoriale perché $W_2 = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \text{ t.c. } \begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \text{ t.c. } \begin{matrix}a=-a\\b=-c\\c=-b\\d=-d\end{matrix}\right\}$
$= \left\{\begin{pmatrix}0&b\\-b&0\end{pmatrix} \in M_{22}(\mathbb{R})\right\}$. Quindi $W_2 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\right\}$ è pertanto è sottospazio vettoriale di V.

W_3 non è sottospazio vettoriale di V poiché $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \notin W_3$ in quanto $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \neq \underbrace{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}}$

2) $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ costituisce base di $W_1 \cap W_2$ e $B = \left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ è base di $W_1 + W_2$

Abbiamo visto che ogni elemento di W_2 è del tipo $\begin{pmatrix}0&b\\-b&0\end{pmatrix}$ e siccome $0+0$ ogni elemento di W_2 appartiene anche a W_1: perciò $W_2 \subset W_1$.
Questo implica che $W_1 \cap W_2 = W_2 = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ e $W_1 + W_2 = W_1$.
Siccome $W_1 = \left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \text{ t.c. } a=d\right\} = \left\{\begin{pmatrix}e&b\\c&e\end{pmatrix} : e,b,c \in \mathbb{R}\right\} = \left\{ e\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} : e,b,c \in \mathbb{R}\right\}$
$= \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$ si ha $W_1 + W_2 = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$.
Siccome $a\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}a&b\\c&e\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix} \Rightarrow a=b=c=0$,
le matrici $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ sono ~~vettori~~ linearmente ~~dip~~ indipendenti e formano una base di $W_1 + W_2$

Esercizio 2 In $\mathbb{R}^3$ siano $s = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \operatorname{Span}\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$, $\quad r_1 : \begin{cases} -x-y-\ z=2 \\ \quad\ \ y+3z=0 \end{cases}$, $\quad r_2 : \begin{cases} 3x-2y \qquad = b \\ \quad\ -2y+z=0 \end{cases}$.

1. Dire se r_1 e r_2 sono parallele coincidenti, parallele distinte, incidenti o sghembe al variare del parametro b.
2. Dati $P_1 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ e $P_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, individuare un punto P appartenente ad s tale che l'angolo tra PP_1 e PP_2 sia di 60 gradi. Un tale punto P è unico?

1) r_1 e r_2 sono sghembe per $b\neq -6$ e sono incidenti per $b=-6$.
La giacitura di r_1 è $\mathrm{Sol}\begin{cases}-x-y-z=0\\ y+3z=0\end{cases} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}-2\\3\\-1\end{pmatrix}\right\}$ e
la giacitura di r_2 è $\mathrm{Sol}\begin{cases}3x-2y \quad =0\\ -2y+z=0\end{cases} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}2\\3\\6\end{pmatrix}\right\}$.
Siccome i vettori direttori non sono proporzionali le giaciture sono differenti e r_1 e r_2 non sono parallele $\forall b\in\mathbb{R}$.
Siccome r_1 e r_2 non sono parallele, esse saranno incidenti se e solo se la loro intersezione è non vuota, cioè se e solo se il sistema lineare $\begin{cases}-x-y-z=2\\ y+3z=0\\ 3x-2y \quad = b\\ -2y+z=0\end{cases}$ ammette soluzioni.

Questo sistema, per il teorema di Rouché-Capelli, ammette soluzioni se e solo se
$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&1&3\\3&-2&0\\0&-2&1\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&-1&-1&2\\0&1&3&0\\3&-2&0&b\\0&-2&1&0\end{pmatrix}.$$
Siccome $\det\begin{pmatrix}0&1&3\\3&-2&0\\0&-2&1\end{pmatrix} = -3\det\begin{pmatrix}1&3\\-2&1\end{pmatrix} = -21 \neq 0$ abbiamo $\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&1&3\\3&-2&0\\0&-2&1\end{pmatrix} = 3$.
Inoltre $\det\begin{pmatrix}-1&-1&-1&2\\0&1&3&0\\3&-2&0&b\\0&-2&1&0\end{pmatrix} = -2\det\begin{pmatrix}0&1&3\\3&-2&0\\0&-2&1\end{pmatrix} - b\det\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\0&1&3\\0&-2&1\end{pmatrix} = 42+7b$, quindi
$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}-1&-1&-1&2\\0&1&3&0\\3&-2&0&b\\0&-2&1&0\end{pmatrix} = \begin{cases}3 \text{ se } b=-6\\ 4 \text{ se } b\neq -6\end{cases}$. Perciò r_1 e r_2 son incidenti per $b=-6$ e sghembe per $b\neq -6$

2) Ci sono 2 punti P in s tali che l'angolo tra PP_1 e PP_2 sia di 60 gradi: sono $\begin{pmatrix}0\\ \sqrt{8/3}\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\ -\sqrt{8/3}\\0\end{pmatrix}$
Siccome $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \in \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$, abbiamo $s = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Il generico punto di s è allora $P = \begin{pmatrix}0\\t\\0\end{pmatrix}$ per $t\in\mathbb{R}$. L'angolo tra PP_1 e PP_2 è di 60 gradi se e solo se
$$\frac{\langle PP_1, PP_2\rangle}{\|PP_1\|\,\|PP_2\|} = \frac{1}{2},$$
cioè se e solo se
$$\frac{\left\langle \begin{pmatrix}-1\\-1-t\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1-t\\1\end{pmatrix}\right\rangle}{\sqrt{(-1-t)^2+1}\,\sqrt{(1-t)^2+1}} = \frac{1}{2},$$
cioè se e solo se $2(t^2-1) = \sqrt{t^4+4}$.
L'ultima equazione equivale a $t^2-1\geq 0$ e $3t^4-8t^2=0$.
Le 2 soluzioni sono $t = \pm\sqrt{8/3}$.

Esercizio 3 Sia $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg(p) \leq 3\}$ e consideriamo l'applicazione lineare

$$f = L\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad L(p(x)) = (-p(0), p'(2) + p(0), p(0) + 4p'(2)).$$

1. Che dimensione hanno il kernel e l'immagine di f? $= L$

2. Sia $W = \{p(x) \in V : p(1) = p(0)\}$. W é un sottospazio di V? In caso positivo dare dei generatori di $f(W)$.

1) $\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}\, L) = 2$ e $\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}\, L) = 2$.

Una base di V è data da $\{x^3, x^2, x, 1\}$. Siccome $L(x^3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 48 \end{pmatrix}$, $L(x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}$, $L(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $L(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ si ha $\mathrm{Im}\, L = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 48 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 48 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 16 \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

e siccome $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ non sono proporzionali essi costituiscono base di $\mathrm{Im}\, L$ e $\dim \mathrm{Im}\, L = 2$.

Siccome $\underset{4}{\dim V} = \dim(\mathrm{Ker}\, L) + \underset{2}{\dim(\mathrm{Im}\, L)}$, deduciamo che $\dim \mathrm{Ker}\, L = 2$.

2) W è un sottospazio vettoriale di V e un insieme di generatori per $f(W)$ è $\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Se $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ si ha $p(0) = d$ e $p(1) = a + b + c + d$.

Perciò $W = \{ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ t.c. } a+b+c+d = d\} =$

$\{ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ t.c. } a+b+c = 0\} =$

$\{ax^3 + bx^2 + (-a-b)x + d \text{ t.c. } a, b, d \in \mathbb{R}\} =$

$\{a(x^3 - x) + b(x^2 - x) + d \text{ t.c. } a, b, d \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Span}\{x^3 - x, x^2 - x, 1\}$.

Perciò W è sottospazio vettoriale di V generato da $x^3 - x$, $x^2 - x$, 1.

$f(W)$ è allora generato da $f(x^3 - x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ 44 \end{pmatrix}$, $f(x^2 - x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}$ e $f(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. In conclusione $f(W) = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Esercizio 4 In $\mathbb{R}^3$ con il prodotto scalare standard $\langle\, ,\rangle$, siano $w_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ e $w_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ e sia

$$G\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad G(v) = \langle v, w_1\rangle \cdot w_2 - \langle v, w_2\rangle \cdot w_1$$

1. La funzione G é diagonalizzabile? In caso positivo dare una base di autovettori

2. La funzione $G^2 = G \circ G$ e' diagonalizzabile?

1) G non è diagonalizzabile.
Siccome $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è lineare esiste $A \in M_{33}(\mathbb{R})$ tale che G è l'applicazione lineare L_A associata alla matrice A.
La prima colonna di A è $A^1 = A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = L_A\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = G\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \left\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$.
La seconda colonna di A è $A^2 = A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = L_A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = G\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \left\langle\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$
La terza colonna di A è $A^3 = A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = L_A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = G\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \left\langle\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$.
Perciò $A = \begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Il polinomio caratteristico di G è allora
$P_G(x) = P_A(x) = \det\begin{pmatrix}-x & -1 & -1\\1 & -x & 0\\1 & 0 & -x\end{pmatrix} = -x^3 - 2x = -x(x^2+2)$.
Siccome l'equazione $-x(x^2+2) = 0$ ha 2 soluzioni complesse non reali $\pm i\sqrt{2}$, $G: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ non è diagonalizzabile.

2) $G \circ G$ è diagonalizzabile
Siccome $G = L_A$, abbiamo $G \circ G = L_A \circ L_A = L_{A\cdot A}$.
Siccome $A\cdot A = \begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\1 & 0 & 0\\1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & -1 & -1\\0 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $G \circ G$ è diagonalizzabile se e solo se $\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\0 & -1 & -1\\0 & -1 & -1\end{pmatrix}$ lo è. Il polinomio caratteristico di $G \circ G$ e $A\cdot A$ è

$$P_{A\cdot A}(x) = \det\begin{pmatrix}-2-x & 0 & 0\\0 & -1-x & -1\\0 & -1 & -1-x\end{pmatrix} = -(x+2)(x^2+2x+1-1) = -(x+2)(x^2+2x) = -x(x+2)^2.$$

Gli autovalori sono 0 e -2. 0 ha molteplicità algebrica 1 e quindi anche molteplicità geometrica $mg(0) = 1$.
La molteplicità geometrica di -2 è $mg(-2) = \dim\left(\operatorname{Ker} L_{\begin{pmatrix}-2-(-2) & 0 & 0\\0 & -1-(-2) & -1\\0 & -1 & -1-(-2)\end{pmatrix}}\right) =$
$\dim \mathrm{Sol}\left(\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = 3 - rg\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & -1 & 1\end{pmatrix} = 3-1 = 2.$

Siccome $\underset{3}{\underset{\shortparallel}{\dim \mathbb{R}^3}} = \underset{1}{\underset{\shortparallel}{mg(0)}} + \underset{2}{\underset{\shortparallel}{mg(-2)}}$ possiamo concludere che

$G \circ G$ è diagonalizzabile.