Nome e Cognome: ....

Durata: 2 ore e 30 minuti. Non è possibile usare appunti o aiuti elettronici. Scrivere le soluzioni in questi fogli.

Esercizio 1 Sia $V = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \deg p \leq 3\}$ e siano $W = \{p(x) \in V : p(-1) = 0 \text{ e } p(2) = 0\}$ e $Z = \{p(x) \in V : p(1) = p(-1) \text{ e } p(2) = p(-2)\}$

1. Esibire una base di W e la dimensione di Z.
2. È vero che mettendo insieme i vettori di una qualsiasi base di W con quelli di una qualsiasi base di Z si ottiene sempre una base di V?

1) Una base di W è $B = \{x^3 - x^2 - 2x, x^3 - 3x^2 + 4\}$. Dim $Z = 2$

Abbiamo $W = \{ax^3 + bx^2 + cx + d$ t.c. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ - $-a + b - c + d = 0$ e $8a + 4b + 2c + d = 0\}$

perciò $ax^3 + bx^2 + cx + d \in W \iff \begin{cases} -a+b-c+d=0 \\ 8a+4b+2c+d=0 \end{cases} \iff \exists\, t, s \in \mathbb{R}$ t.c. $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

risolvo il sistema

Quindi $W = \{t(x^3 - x^2 + 2x) + s(x^3 - 3x^2 + 4)$ t.c. $s, t \in \mathbb{R}\}$ cioè

$W = \operatorname{span}\{(x^3 - x^2 + 2x), x^3 - 3x^2 + 4\}$ e siccome i 2 polinomi sono non proporzionali, essi costituiscono base di W.

Analogamente abbiamo $Z = \{ax^3 + bx^2 + cx + d$ t.c. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a + b + c + d = -a + b - c + d$ e $8a + 4b + 2c + d = -8a + 4b - 2c + d\}$

perciò $ax^3 + bx^2 + cx + d \in Z$ se e solo se $\begin{cases} a + c = 0 \\ 8a + 2c = 0 \end{cases} \iff a = 0, c = 0$.

Quindi $Z = \{bx^2 + d$ t.c. $b, d \in \mathbb{R}\}$ e perciò $Z = \operatorname{Span}\{x^2, 1\}$ e $\dim Z = 2$.

2) È vero.

Osserviamo che $\operatorname{Span}\{1, x^2, x^3 - 3x^2 + 4, x^3 - x^2 - 2x\} = V$ perché $\dim V = 4$ e $\dim(\operatorname{Span}\{1, x^2, x^3 - 3x^2 + 4\}) = 3$ poiché $x^3 - 3x^2 + 4 \notin \operatorname{Span}\{1, x^2\}$ (poiché span$\{1, x^2\}$ contiene solo polinomi di grado ≤ 2) e $\dim \operatorname{Span}\{1, x^2, x^3 - 3x^2 + 4, x^3 - x^2 - 2x\} = 4$ poiché $x^3 - x^2 - 2x \notin \operatorname{Span}\{1, x^2, x^3 - 3x^2 + 4\}$ (perché il coefficiente di primo grado di $x^3 - x^2 - 2x$ è non nullo).

Ma $W + Z = \operatorname{Span}\{1, x^2, x^3 - 3x^2 + 4, x^3 - x^2 - 2x\}$ poiché $Z = \operatorname{Span}\{1, x^2\}$ e $W = \operatorname{Span}\{x^3 - 3x^2 + 4, x^3 - x^2 - 2x\}$.

Ora, se $B_W = \{b_{1W}, b_{2W}\}$ e $B_Z = \{b_{1Z}, b_{2Z}\}$ sono basi di W e Z, dalla teoria sappiamo che $W + Z = \operatorname{Span}\{b_{1W}, b_{2W}, b_{1Z}, b_{2Z}\}$ e siccome $\dim(W + Z) = \dim V = 4$ e $b_{1W}, b_{2W}, b_{1Z}, b_{2Z}$ sono 4 generatori per V deduciamo che $b_{1W}, b_{2W}, b_{1Z}, b_{2Z}$ formano base per $W + Z = V$.

Esercizio 2 Sia $r = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\4\end{pmatrix} + \text{Span}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ e, al variare dei parametri λ, a, sia S il sistema

$$\begin{cases} x-2y+z &= a \\ \lambda x - y + z + w &= 4 \end{cases}$$

1. Per quali valori dei parametri λ, a la retta r è contenuta nell'insieme delle soluzioni?
2. Dati λ, a come sopra, stabilire se la retta r coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema S e, in caso di risposta negativa, aggiungere una o più equazioni al sistema S in modo che r sia l'insieme delle soluzioni del nuovo sistema lineare.

1) $a=1$ $\lambda=-1$.

Se $r \subseteq Sol\, S$, $\begin{pmatrix}1\\1\\2\\4\end{pmatrix}$ deve soddisfare le 2 equazioni e quindi deve essere $1-2\cdot 1+2=a$ e $\lambda-1-2-4=4$ cioè $a=1$ e $\lambda=-1$.

Viceversa se $a=1$ e $\lambda=-1$ abbiamo $\begin{pmatrix}1\\1\\2\\4\end{pmatrix} \in Sol(S)$ e per il teorema di Rouché Capelli si ha $Sol(S) = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\4\end{pmatrix} + Sol\begin{cases}x-2y+z=0\\-x-y+z+w=0\end{cases}$

Siccome $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ è soluzione di $\begin{cases}x-2y+z=0\\-x-y+z+w=0\end{cases}$ deduciamo che

$$r = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\4\end{pmatrix} + \text{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\right\} \subseteq Sol\begin{cases}x-2y+z=1\\-x-y+z+w=4\end{cases}.$$

2) $r \neq Sol\left(\begin{cases}x-2y+z=1\\-x-y+z+w=4\end{cases}\right)$. $r = Sol\begin{cases}x-2y+z=1\\-x-y+z+w=4\\-z+w=2\end{cases}$.

Siccome $rg\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\-1&-1&1&1\end{pmatrix}=2$, $Sol\left(\begin{cases}x-2y+z=1\\-x-y+z+w=4\end{cases}\right)$ è un sottospazio affine di dimensione 2 di $\mathbb{R}^4$ (cioè un piano di $\mathbb{R}^4$) e, poiché r ha dimensione 1 (cioè la sua giacitura ha dimensione 1, cioè r è una retta di $\mathbb{R}^4$) non può essere $r = Sol\begin{cases}x-2y+z=1\\-x-y+z+w=4\end{cases}$ e deve essere $r \subsetneq Sol\left(\begin{cases}x-2y+z=1\\-x-y+z+w=4\end{cases}\right)$.

Osserviamo che $\begin{pmatrix}1\\1\\2\\4\end{pmatrix}$ soddisfa le tre equazioni $\begin{cases}x-2y+z=1\\-x-y+z+w=4\\-z+w=2\end{cases}$, perciò per Rouché Capelli $Sol\begin{cases}x-2y+z=1\\-x-y+z+w=4\\-z+w=2\end{cases} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\\4\end{pmatrix} + Sol\begin{cases}x-2y+z=0\\-x-y+z+w=0\\-z+w=0\end{cases}$.

Siccome $rg\begin{pmatrix}1&-2&1&0\\-1&-1&1&1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}=3$, $Sol\begin{cases}x-2y+z=0\\-x-y+z+w=0\\-z+w=0\end{cases}$ è sottospazio vettoriale di dim 1 di $\mathbb{R}^4$ e siccome $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ soddisfa le 3 equazioni $\begin{cases}x-2y+z=0\\-x-y+z+w=0\\-z+w=0\end{cases}$ deduciamo $Sol\left(\begin{cases}x-2y+z=0\\-x-y+z+w=0\\-z+w=0\end{cases}\right) = \text{Span}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ e l'uguaglianza $r = Sol\begin{cases}x-2y+z=1\\-x-y+z+w=4\\-z+w=2\end{cases}$.

Esercizio 3 Sia $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione tale che

$$F\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \qquad F\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}, \qquad F\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}.$$

1. Trovare equazioni cartesiane per l'immagine di F ed equazioni parametriche per $F^{-1}\begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix} = \left\{v \in \mathbb{R}^3 : F(v) = \begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix}\right\}$
2. Quanto vale al massimo il rango di un'applicazione lineare $G\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $G \circ F = 0$?

1) Un sistema di equazioni cartesiane per $\operatorname{Im} F$ è $\{x+y+z=0$.
Un sistema di equazioni parametriche per $F^{-1}\begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix}$ è $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-4\\1\end{pmatrix}$ con $t \in \mathbb{R}$.
Siccome una base di $\mathbb{R}^3$ è costituita da $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ si ha

$\operatorname{Im} F = \operatorname{Span}\left\{F\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, F\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, F\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix}\right\}$,
siccome $\operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\0 & -1 & 3\\-1 & -2 & -4\end{pmatrix} = 2$ si ha $\operatorname{Im}(F) = \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\}$.

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix}\right\} \iff \operatorname{rg}\begin{pmatrix}x & 1 & 3\\y & 0 & -1\\z & -1 & -2\end{pmatrix} = 2 \iff \det\begin{pmatrix}x & 1 & 3\\y & 0 & -1\\z & -1 & -2\end{pmatrix} = 0 \iff -x-y-z=0 \iff x+y+z=0$

Quindi $\{x+y+z$ è sistema di equazioni cartesiane per $\operatorname{Im} F$.
Siccome $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è lineare $\exists A \in M_{33}(\mathbb{R})$ t.c. $F = L_A$ e inoltre le colonne di A sono $A^1 = F\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ $A^2 = F\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $A^3 = F\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Perciò $A^1 = F\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $A^2 = F\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

$A^3 = F\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = F\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\3\\-4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\-1\\-2\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\4\\-4\end{pmatrix}$.

Perciò $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & -1 & 4\\-1 & 0 & -4\end{pmatrix}$ e $F^{-1}\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\0 & -1 & 4\\-1 & 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix}\right\} =$

$= \operatorname{Sol}\begin{pmatrix}\begin{cases}x+y=4\\-y-4z=-1\\-x+4z=-3\end{cases}\end{pmatrix} \underset{\text{risolvo il sistema}}{=} \left\{\begin{pmatrix}3+4t\\1-4t\\t\end{pmatrix} : t \in \mathbb{R}\right\}$. Perciò $F^{-1}\begin{pmatrix}4\\-1\\-3\end{pmatrix}$ ha equazioni parametriche $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4\\-4\\1\end{pmatrix}$.

2) Deve essere $\operatorname{rg}(G)$ uguale al massimo a 1.
Siccome $\operatorname{rg}(F) = \operatorname{rg} A = 2$, $\operatorname{Im} F$ ha dimensione 2. Se vogliamo $G \circ F = 0$ si deve avere $\operatorname{Im} F \subseteq \operatorname{Ker} G$ e quindi $\dim \operatorname{Ker} G \geq \dim \operatorname{Im} f = 2$.
Ma allora $\operatorname{rg}(G) = \dim \operatorname{Im} G = 3 - \dim \operatorname{Ker} G \leq 3-2=1$.
Siccome $\{x+y+z=0$ è sistema di equazioni per $\operatorname{Im} F$, possiamo prendere come G di rango 1 che soddisfa $G \circ F = 0$ la applicazione lineare associata alla matrice $B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Esercizio 4 Sia $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare $F(x, y, z) = (x + 3y + 2z, 2x - 2z, y + z)$.

1. F è diagonalizzabile? In caso esibire una base diagonalizzante.

2. Calcolare una base dell'intersezione $\mathrm{Im}(F^5) \cap \mathrm{Im}(F^6)$

1) F è diagonalizzabile. Una base diagonalizzante è $B = \{\overset{b_1}{(1,-1,1)}, \overset{b_2}{(4,2,1)}, \overset{b_3}{(-2,2,-1)}\}$

Abbiamo $F(x,y,z) = (x+3y+2z, 2x-2z, y+z)$, quindi $F(1,0,0) = (1,2,0)$
$F(0,1,0) = (3,0,1)$ e $F(0,0,1) = (2,-2,1)$: pertanto la matrice rappresentativa di F rispetto alle basi canoniche è $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Il polinomio caratteristico di F è $p_F(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 3 & 2 \\ 2 & -x & -2 \\ 0 & 1 & 1-x \end{pmatrix} =$ sviluppo I colonna
$(1-x)\det\begin{pmatrix} -x & -2 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} - 2\det\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} = (1-x)(x^2-x+2) + 6x - 6 + 4 =$
$= -x^3 + 2x^2 - 3x + 2 + 6x - 2 = -x^3 + 2x^2 + 3x = -x(x-3)(x+1)$.

Perciò gli autovalori sono $0, 3, -1$ e siccome il dominio ha dimensione 3 F è diagonalizzabile e una base diagonalizzante si ottiene mettendo insieme un autovettore di autovalore 0, uno di autovalore 3 e uno di autovalore -1.

L'autospazio di autovalore 0 è $\mathrm{Sol}\begin{cases} x+3y+2z=0 \\ 2x \quad -2z=0 \\ y+z=0 \end{cases} = \mathrm{Span}(1,-1,1)$

L'autospazio di autovalore 3 è $\mathrm{Sol}\begin{cases} -2x+3y+2z=0 \\ 2x-3y-2z=0 \\ y-2z=0 \end{cases} = \mathrm{Span}(4,2,1)$

L'autospazio di autovalore -1 è $\mathrm{Sol}\begin{cases} 2x+3y+2z=0 \\ 2x+y-2z=0 \\ y+2z=0 \end{cases} = \mathrm{Span}(-2,2,-1)$.

Perciò $B := \{b_1 := (1,-1,1), b_2 := (4,2,1), b_3 := (-2,2,1)\}$ è una base diagonalizzante per F.

2) Una base di $\mathrm{Im}(F^5) \cap \mathrm{Im}(F^6)$ è $\overline{B} := \{\overline{b}_1 = (4,2,1), \overline{b}_2 (-2,2,1)\}$

Siccome $\{(1,-1,1), (4,2,1), (-2,2,-1)\}$ forma o base di $\mathbb{R}^3$ di autovettori per F,
$\forall n \in \mathbb{N}$ abbiamo $\mathrm{Im}(F^n) = \mathrm{Span}\{F^n(1,-1,1), F^n(4,2,1) F^n(-2,2,1)\} =$
$\mathrm{Span}\{0^n(1,-1,1), 3^n(4,2,1), (-1)^n(-2,2,1)\} = \mathrm{Span}\{(4,2,1), (-2,2,1)\}$.

Quindi $\mathrm{Im}(F^5) = \mathrm{Im}\, F^6 = \mathrm{Span}\{(4,2,1)\ (-2,2,1)\}$ e
$\mathrm{Im}\, F^5 \cap \mathrm{Im}\, F^6 = \mathrm{Span}\{(4,2,1), (2-2\ 1)\}$.