Nome e Cognome: .... Orale all'appello: □3 □4

Durata: 2 ore e 30 minuti. Non è possibile usare appunti o aiuti elettronici. Scrivere le soluzioni in questi fogli.

Esercizio 1 Siano

$$S=\left\{\begin{pmatrix}s\\3s\\6s^3\end{pmatrix}: s\in\mathbb{R}\right\},\quad T=\left\{\begin{pmatrix}s\\3s\\6t\end{pmatrix}: s,t\in\mathbb{R}\right\}.$$

1. Dire se S è un~~o~~ sotto spazio vettoriale e se lo è calcolarne la dimensione. Dire se T è un~~o~~ sotto spazio vettoriale e se lo è calcolarne la dimensione.

2. Dato $\langle\ ,\ \rangle$ il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^3$ calcolare una base degli spazi vettoriali

$$S'=\{v\in\mathbb{R}^3:\langle v,w\rangle=0 \text{ per ogni } w\in S\},\quad T'=\{v\in\mathbb{R}^3:\langle v,w\rangle=0 \text{ per ogni } w\in T\}.$$

1) S non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e T è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione 2.

S non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ perché ponendo $s=1$ si trova che $\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}\in S$ ma $2\begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\\12\end{pmatrix}\notin S$ cioè non esiste $s\in\mathbb{R}$ tale che $\begin{pmatrix}2\\6\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}s\\3s\\6s^3\end{pmatrix}$: infatti l'uguaglianza tra le prime coordinate impone $2=s$ ma, se $2=s$, le terze coordinate non possono essere uguali poiché $6s^3=6\cdot2^3=48\neq12$.

T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ infatti $T=\left\{s\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} \text{ t.c. } t,s\in\mathbb{R}\right\}$

cioè $T=\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}\right\}$: pertanto T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e i vettori linearmente indipendenti $\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}$ ne costituiscono una base.

2) Si ha $S'=T'$ e una base per questi sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$ è $\left\{\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

Si ha $S'=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \text{ t.c. } \left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}s\\3s\\6s^3\end{pmatrix}\right\rangle=0\ \forall s\in\mathbb{R}\right\}$ cioè $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ è in S' se e solo se $sx+3sy+6s^3z=0\ \forall s\in\mathbb{R}$ o equivalentemente $6z\,s^3+(x+3y)s=0\ \forall s\in\mathbb{R}$. Fissati $x,y,z\in\mathbb{R}$ l'espressione $6zs^3+(x+3y)s$ è un polinomio in s e, esso vale $0\ \forall s\in S$ se e solo se i suoi coefficienti sono nulli. Pertanto $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in S'$ se e solo se $\begin{cases}6z=0\\x+3y=0\end{cases}$ e risolvendo il sistema si trova $S'=\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

Siccome $T=\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}\right\}$ e il prodotto scalare è bilineare si ha $T'=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \text{ t.c. } \left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\right\rangle=0, \left\langle\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}\right\rangle=0\right\}$. Perciò $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in T'$ se e solo se $\begin{cases}x+3y=0\\6z=0\end{cases}$ e, risolvendo il sistema si trova $T'=\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

Esercizio 2 Sia $W=\{\left(\begin{smallmatrix}x\\y\end{smallmatrix}\right)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}$ il primo asse di $\mathbb{R}^2$. Dentro $M_{2,2}(\mathbb{R})$, isomorfo a $\mathbb{R}^4$, sia

$$S=\left\{A\in M_{2,2}(\mathbb{R}) :\ A\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)=A\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)\ \text{ e }\ A\left(\begin{smallmatrix}3\\0\end{smallmatrix}\right)\in W\right\}.$$

1. Calcolare una base di S.
2. Trovare una base del piú piccolo sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$ che contiene $T=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)+\mathrm{Span}(\left(\begin{smallmatrix}0&2\\0&3\end{smallmatrix}\right))$.

1) Una base di S è $B=\{\underset{b_1}{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}, \underset{b_2}{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}\}$.

Per definizione di S abbiamo $S=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_{22}(\mathbb{R}) \text{ t.c. } \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\in W\right\}$

Perciò $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in S$ se e solo se $\begin{cases}a+b=b\\c+d=d\end{cases}$ e $c=0$. Deduciamo che

$S=\left\{\begin{pmatrix}0&c\\0&d\end{pmatrix}\in M_{22}(\mathbb{R})\right\} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$.

2) Una base del più piccolo sottospazio vettoriale di $M_{22}(\mathbb{R})$ che contiene T è $B'=\left\{b_1'=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, b_2'=\begin{pmatrix}0&2\\0&3\end{pmatrix}\right\}$.

Siccome $T=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0&2\\0&3\end{pmatrix}\in M_{22}(\mathbb{R}) \text{ t.c. } s\in\mathbb{R}\right\}$ e

$\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\0&3\end{pmatrix}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0&2\\0&3\end{pmatrix}\in M_{22}(\mathbb{R}) \text{ t.c. } s,t\in\mathbb{R}\right\}$ abbiamo $T\subset\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\0&3\end{pmatrix}\right\}$

Osserviamo che si ha anche $\underbrace{\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\0&3\end{pmatrix}\right\}}_{=\ \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\0&4\end{pmatrix}\right\}}=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\0&3\end{pmatrix}\right\}$

perché $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\0&3\end{pmatrix}\right\}$ e $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\0&4\end{pmatrix}\right\}$ hanno dimensione 2

e $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\0&4\end{pmatrix}\right\}\subseteq\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\0&3\end{pmatrix}\right\}$ perché $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&2\\0&4\end{pmatrix}$.

Quindi, per mostrare che $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\0&3\end{pmatrix}\right\}$ è il più piccolo sottospazio vett. che contiene T basta mostrare che $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0&2\\0&4\end{pmatrix}\in T$.

In questo modo $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\0&3\end{pmatrix}\right\}=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\0&4\end{pmatrix}\right\}$ è contenuto in ogni sottospazio vettoriale che contiene T.

Infine, ponendo $s=0$ e $s=1$, in $\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}0&2\\0&3\end{pmatrix}$ si ottiene che

$\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}0&2\\0&4\end{pmatrix}\in T$.

Esercizio 3 Sia

$$F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad F(v) = \left(\left\langle v, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle, \left\langle v, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right\rangle, \left\langle v, \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix}\right\rangle, \left\langle v, \begin{pmatrix}-4\\-2\\-4\end{pmatrix}\right\rangle\right)$$

1. Calcolare dimensione del kernel e dell'immagine di F.
2. Sia $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}\right)$. Calcolare la dimensione dell'ortogonale di $F(W)$ in $\mathbb{R}^4$.

1) Abbiamo $\mathrm{Dim}(\mathrm{Ker}(F)) = 1$ e $\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(F)) = 2$

$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\,F$ se e solo se $\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = 0$, $\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\right\rangle = 0$, $\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\2\\4\end{pmatrix}\right\rangle = 0$, $\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-2\\-4\end{pmatrix}\right\rangle = 0$,

cioè se e solo se è soluzione di $\begin{cases} 2x+y=0 \\ z=0 \\ 4x+2y+4z=0 \\ -4x-2y-4z=0 \end{cases}$. Risolvendo il sistema lineare si ottiene $\mathrm{Ker}\,F = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}\right\}$ e $\dim \mathrm{Ker}(F) = 1$.

Siccome $\underbrace{\mathrm{Dim}\,\mathbb{R}^3}_{=3} = \underbrace{\dim(\mathrm{Ker}(F))}_{=1} + \mathrm{Dim}(\mathrm{Im}(F))$ si deduce che

$\mathrm{Dim}(\mathrm{Im}\,F) = 2$.

2) L'ortogonale a $F(W)$ in $\mathbb{R}^4$ ha dimensione 2.

Siccome $W = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right\}$ abbiamo $F(W) = \left\{F\left(a\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}\right) \text{ t.c. } a,b \in \mathbb{R}\right\}$

$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{linearità di } F}}{=} \left\{ a F\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + b F\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix} \text{ t.c. } a,b \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Span}\left\{F\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, F\begin{pmatrix}4\\5\\0\end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Span}\{(4,6,8,-8), (13,0,26,-26)\}$

Quindi $F(W)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2: il suo perpendicolare ha perciò dimensione pari a $\mathrm{Dim}\,F(W)^{\perp} = \mathrm{Dim}\,\mathbb{R}^4 - \mathrm{Dim}\,F(W) = 4-2 = 2$

Esercizio 4 Sia V lo spazio di matrici $M_{2,2}(\mathbb{R})$, che é isomoorfo a $\mathbb{R}^4$. Sia $F\colon V \to V$ l'endomorfismo che manda una matrice A in

$$F(A) = A - 3A^t.$$

1. F è diagonalizzabile? In caso esibire una base diagonalizzante.
2. Per quali λ in $\mathbb{R}$ la funzione $F_\lambda(A) = F(A) + \lambda A$ è invertibile?

1) F è diagonalizzabile e una base diagonalizzante è

$$\mathcal{B} := \left\{ \underset{b_1}{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}, \underset{b_2}{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}, \underset{b_3}{\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}}, \underset{b_4}{\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}} \right\}.$$

Sia $Can := \left\{ \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} \right\}$ la base canonica di $M_2(\mathbb{R})$.

Si ha
$$F\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&0\\0&0\end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$F\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\-3&0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$F\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-3\\1&0\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$
$$F\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&-2\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Perciò la matrice rappresentativa di F rispetto alla base Can è
$$M = \begin{pmatrix}-2&0&0&0\\0&1&-3&0\\0&-3&1&0\\0&0&0&-2\end{pmatrix}.$$
Il polinomio caratteristico è $p_F(x) = \mathrm{Det}\begin{pmatrix}-2-x&0&0&0\\0&1-x&-3&0\\0&-3&1-x&0\\0&0&0&-2-x\end{pmatrix} =$

$$(x+2)^2 \det\begin{pmatrix}1-x&-3\\-3&1-x\end{pmatrix} = (x+2)^2(x^2-2x+1-9) = (x+2)^2(x^2-2x-8) = (x+2)^3(x-4).$$

Gli autovalori sono -2 con molteplicità algebrica $ma(-2)=3$ e 4 con molteplicità algebrica $ma(4)=1$.

Siccome $Sol\left((M+2I)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = Sol\begin{pmatrix}3x_2-3x_3=0\\-3x_2+3x_3=0\end{pmatrix} = Span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

e $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ sono indipendenti otteniamo che $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ costituiscono base dell'autospazio relativo a -2.

Siccome $Sol\left((M-4I)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right) = Sol\begin{pmatrix}-6x_1=0\\-3x_2-3x_3=0\\-3x_2-3x_3=0\\-6x_4=0\end{pmatrix} = Span\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$

Una base dell'autospazio relativo a 4 è costituita da $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

Quindi $\mathcal{B} = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix} \right\}$ è base di autovettori per F.

2) F_λ è invertibile se e solo se $\lambda \neq 2$ e $\lambda \neq -4$.

Siccome $F_\lambda\colon M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ è un endomorfismo esso è invertibile se e solo se è iniettiva; cioè se e solo se $\forall A \neq \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ si ha $F(A) \neq \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

Ma $F_\lambda(A) = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ se e solo se $F(A) + \lambda A = 0$ se e solo se $F(A) = -\lambda A$, cioè A è autovettore di F di autovalore $-\lambda$. Siccome gli autovalori di F sono -2 e $+4$, F_λ è invertibile se e solo se $\lambda \neq +2$ e $\lambda \neq -4$