Nome e Cognome: ....

Durata: 2 ore e 30 minuti. Non è possibile usare appunti o aiuti elettronici. Scrivere le soluzioni in questi fogli.

Esercizio 1 Sia $X_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y - 3z^2 = 0 \right\}$ e sia $X_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y - z^2 = 0 \,, x - y = 0 \right\}$.
Sia $Y_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mathrm{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ e sia $Y_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 4\lambda+2 \\ 2\mu^3 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Per $i = 1$ e $i = 2$ stabilire se X_i è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

2. Y_1 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$? Y_2 è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$?

1) X_1 non è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, X_2 è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$
X_1 non è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ perché $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in X_1$ ma $2\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin X_1$
perché $6 - 0 - 3 \cdot 4 = -6 \neq 0$

X_2 è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$: infatti $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in X_2 \iff x - y - z^2 = 0$ e $x - y = 0$
$\iff x - y = 0$ e $z^2 = 0 \iff x - y = 0$ e $z = 0$.
Perciò è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ e quindi X_2 è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

2) Y_1 è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$, Y_2 è un sottospazio affine di $\mathbb{R}^3$.
Osserviamo che $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in Y_1$: infatti, siccome $\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 10 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} = 2 \cdot (-9) - 2 \cdot 6 + 10 \cdot 3 = 0$,
abbiamo che $\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \left(-\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}\right) \in Y_1$.

Siccome $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in Y_1$ deduciamo $Y_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$,

e quindi Y_1 è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ (essendo lo Span di 2 vettori di $\mathbb{R}^3$

Abbiamo $Y_2 = \left\{\begin{pmatrix} \lambda \\ 4\lambda+2 \\ 2\mu^3 \end{pmatrix} : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu^3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ t.c. } \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\} =$

siccome $\forall$ ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ $\exists \mu \in \mathbb{R}$ t.c. $\mu^3 = \alpha$

$= \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} : \lambda, \alpha \in \mathbb{R}\right\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

per definizione di sottospazio affine passante per $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e parallelo al sottospazio vettoriale $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$.

Esercizio 2 Sia $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Dati i sistemi lineari

$$S_1 : \begin{cases} x - 2y - 3z + w &= -2 \\ x - y + z - w &= 3 \\ x + y + 9z - 5w &= 13 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x - 2y - 3z + w &= -2 \\ x - y + 3z - w &= 7 \end{cases}$$

1. Stabilire se X è l'insieme delle soluzioni di S_1 e se X è l'insieme delle soluzioni di S_2.
2. Trovare equazioni parametriche per l'intersezione tra i sottospazi affini definiti dai sistemi S_1 e S_2

1) X è l'insieme delle soluzioni di S_1, X non è l'insieme delle soluzioni di S_2.
Osserviamo che $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ soddisfa le 3 equazioni di S_1.
Per il teorema di Rouché-Capelli abbiamo $Sol(S_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + Sol\begin{pmatrix} x-2y-3z+w=0 \\ x-y+z-w=0 \\ x+y+9z-5w=0 \end{pmatrix}$.
Per mostrare che $X = Sol(S_1)$ basta allora mostrare che $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = Sol\begin{pmatrix} x-2y-3z+w=0 \\ x-y+z-w=0 \\ x+y+9z-5w=0 \end{pmatrix}$. Siccome $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ soddisfano le 3 equazioni $\begin{cases} x-2y-3z+w=0 \\ x-y+z-w=0 \\ x+y+9z-5w=0 \end{cases}$ abbiamo $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} \subseteq Sol(S_1)$.
Siccome $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono indipendenti abbiamo $\dim \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = 2$ e per mostrare che $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = Sol(S_1)$ è sufficiente far vedere che $\dim\left(Sol\begin{pmatrix} x-2y-3z+w=0 \\ x-y+z-w=0 \\ x+y+9z-5w=0 \end{pmatrix}\right) = 2$. Si ha $\dim\left(Sol\begin{pmatrix} x-2y-3z+w=0 \\ x-y+z-w=0 \\ x+y+9z-5w=0 \end{pmatrix}\right) =$

$$4 - rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 9 & -5 \end{pmatrix} = 4 - rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 12 & -6 \end{pmatrix} = 4 - 2 = 2.$$
$II - I$, $III - I$

X non è lo spazio delle soluzioni di S_2 perché la giacitura di X non soddisfa il sistema omogeneo associato ad S_2, più precisamente $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ non soddisfa $x - y + 3z - w = 0$.

2) Un sistema di equazioni parametriche per l'intersezione dei sottospazi affini definiti da S_1 e S_2 è: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.
Evitando di scrivere 2 volte le stesse equazione, l'intersezione voluta è $Sol\begin{pmatrix} x-2y-3z+w=-2 \\ x-y+z-w=3 \\ x+y+9z-5w=13 \\ x-y+3z-w=7 \end{pmatrix}$. Siccome $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ soddisfa le quattro equazioni e $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ soddisfa le corrispondenti equazioni omogenee abbiamo che $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è incluso nell'intersezione e per avere $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = Sol\begin{pmatrix} x-2y-3z+w=-2 \\ x-y+z-w=3 \\ x+y+9z-5w=13 \\ x-y+3z-w=7 \end{pmatrix}$ basta mostrare che $\dim Sol\begin{pmatrix} x-2y-3z+w=0 \\ x-y+z-w=0 \\ x+y+9z-5w=0 \\ x-y+3z-w=0 \end{pmatrix} = 1$. Questo è vero perché $\dim Sol\begin{pmatrix} x-2y-3z+w=0 \\ x-y+z-w=0 \\ x+y+9z-5w=0 \\ x-y+3z-w=0 \end{pmatrix} =$

$$4 - rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 9 & -5 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 4 - rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 12 & -6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 4 - rg\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 - 3 = 1$$
$IV - II \to$

Esercizio 3 Sia V lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 simmetriche e sia $f\colon V \to \mathbb{R}^4$ la funzione definita da $f\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-b \\ 0 \\ 2a-3c \\ b-3c\end{pmatrix}$

1. Calcolare dimensione del nucleo e dell'immagine di f.
2. Esiste un'applicazione lineare $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ tale che $g \circ f$ sia suriettiva? Esiste un'applicazione lineare $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tale che $h(f\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}$? $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$

1) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2 \quad \dim(\text{nucleo di } f) = 1$

Per definizione di f abbiamo $\mathrm{Im} f = \left\{ \begin{pmatrix} 2a-b \\ 0 \\ 2a-3c \\ b-3c\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ t.c. } a,b,c \in \mathbb{R} \right\} =$

$= \left\{ a\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -3\end{pmatrix} \right\}$.

Siccome $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}$ sono indipendenti e $3\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0\end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0\end{pmatrix}$, una base di $\mathrm{Im} f$ è $B = \left\{ b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix} \right\}$ e perciò $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

Inoltre $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker} f$ se e solo se $\begin{cases} 2a-b=0 \\ 0=0 \\ 2a-3c=0 \\ b-3c=0 \end{cases}$ cioè se e solo se $b = 2a$, $c = \frac{2}{3}a$.

Perciò $\mathrm{Ker} f = \left\{ \begin{pmatrix} a & 2a \\ 2a & \frac{2}{3}a\end{pmatrix} \text{ t.c. } a \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & \frac{2}{3}\end{pmatrix} \right\}$.

Quindi $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

2) Non esiste $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineare tale che $g \circ f$ sia suriettiva.

Non esiste $h: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ lineare tale che $h(f\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}$

Osserviamo che $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix} \text{ t.c. } a,b,c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ t.c. } a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

$= \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \right\}$ e siccome $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ sono linearmente indipendenti si ha $\dim V = 3$

Se esistesse $g: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ lineare e tale che $g \circ f : V \to \mathbb{R}^3$ è suriettiva avremmo $\underbrace{\dim V}_{3} = \dim \mathrm{Ker}(g \circ f) + \dim \mathrm{Im}\, g \circ f \underset{\text{suriettività}}{=} \dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) + \underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{3}$.

Ma allora avremmo $\dim(\mathrm{Ker}(g \circ f)) = 0$, cioè $\mathrm{Ker}\, g \circ f = 0$: questo è assurdo perché $\mathrm{Ker}(g \circ f) \supset \mathrm{Ker} f \neq 0$.

Per mostrare che non esiste $h: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ lineare tale che $h(f\begin{pmatrix} a & b \\ b & c\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} a \\ b\end{pmatrix}$ osserviamo che, se tale h esistesse, avremmo

•) $h(f\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix}$, cioè $h\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix}$

••) $h(f\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}$, cioè $h\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix}$ e •••) $h(f\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}$, cioè $h\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}$

Questo non è possibile perché $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -3\end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix}$ e, se h è lineare, dovrebbe essere $h\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -3\end{pmatrix} = -\frac{3}{2}h\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0\end{pmatrix} - 3h\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1\end{pmatrix} = -\frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -3\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0\end{pmatrix}$.

Esercizio 4 Sia $A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -6 & -4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ e sia per ogni $t \in \mathbb{R}$ $B_t := \begin{pmatrix} 3 & t & 1 \\ 3 & t & 1 \\ 3 & t & 1 \end{pmatrix}$

1. A è diagonalizzabile? In caso di risposta affermativa, dare una base diagonalizzante.
2. Per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ la matrice B_t è diagonalizzabile?

1) A è diagonalizzabile e una base diagonalizzante è $B = \{ b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \}$

Osserviamo che A ha rango 1 e l'immagine di L_A è generata da $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Questo implica che $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore poiché $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\, L_A = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e pertanto esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Facendo il conto otteniamo $A\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -6 & -4 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e quindi $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore -1.

Inoltre siccome $rg\, A = 1$, 0 è autovalore di molteplicità geometrica pari a $3 - rg\, A = 2$. L'autospazio relativo all'autovalore 0 è
$$sol\begin{pmatrix} x + 3y + 2z = 0 \\ -2x - 6y - 4z = 0 \\ 2x + 6y + 4z = 0 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}.$$
Siccome $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e $mg(0) = 2$, $mg(-1) \geq 1$ e $mg(0) + mg(-1) \leq 3$ deduciamo $mg(0) + mg(-2) = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ e A è diagonalizzabile. Una base di autovettori si ottiene mettendo insieme basi degli autospazi: quindi $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ costituiscono base di autovettori per A.

2) B_t è diagonalizzabile se e solo se $t \neq -4$.

Osserviamo che $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore di autovalore $4+t$ e che $rg(B_t) = 1$ $\forall t$.

Se $t \neq -4$, cioè se $t + 4 \neq 0$ otteniamo $mg(t+4) \geq 1$ e $mg(0) \geq 2$.

Pertanto $mg(0) + mg(t+4) \geq \underset{\dim \mathbb{R}^3}{\underset{\|}{3}}$ e B_t è diagonalizzabile.

Se $t = -4$ B_{-4} non è diagonalizzabile perché B_{-4} ammette solo 0 come autovalore e $mg(0) = 2 \neq 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$.

Per mostrare che B_{-4} ha solo 0 come autovalore, osserviamo che se $\lambda \neq 0$ è autovalore, $\exists v \neq 0$ tale che $B_{-4}(v) = \lambda v$, questo vuol dire che $\lambda v \in \mathrm{Im}(B_{-4})$ e, siccome $\lambda \neq 0$, anche $v \in \mathrm{Im}\, V_{-4}$: quindi v è multiplo di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e, siccome $B_{-4}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, v è autovettore di autovalore 0. Questo è assurdo perché abbiamo supposto $\lambda \neq 0$