Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (6/2/2025)

Esercizio A1. [punti 6] Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità di

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2\log(x^2+y^2)+x^3y+2y & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\,. \end{cases}$$

Determinare l'eventuale equazione del piano tangente al grafico nei punti $(0,0)$ e $(1,0)$.

Svolgimento: (a) La continuità di f in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. In $(0,0)$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\log(x^2+y^2)+x^3y+2y=\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2\log(x^2+y^2)=\lim_{\varrho\to0}\varrho^2\log\varrho^2\cos^2\vartheta=0,$$

perché $\varrho^2\log\varrho^2\to0$ e $|\cos^2\vartheta|\leq1$. Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$.
(b) Calcoliamo le derivate parziali in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y)&=2x\log(x^2+y^2)+\frac{2x^3}{x^2+y^2}+3x^2y\\ f_y(x,y)&=\frac{2x^2y}{x^2+y^2}+x^3+2. \end{aligned}$$

Quindi le derivate parziali sono anche continue in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Calcoliamole in $(0,0)$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(0,0)&=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}t\log(t^2)=0\\ f_y(0,0)&=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{2t}{t}=2. \end{aligned}$$

(c) Infine, f è differenziabile in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, perché le derivate parziali sono continue in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. In $(0,0)$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f_y(0,0)y}{(x^2+y^2)^{1/2}}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\log(x^2+y^2)+x^3y+2y-2y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\\ &=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{1/2}}+\frac{x^3y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\\ &=\lim_{\varrho\to0}\varrho\log(\varrho^2)\cos^2\vartheta=0, \end{aligned}$$

perché $\varrho\log(\varrho^2)\to0$ e $|\cos^2\vartheta|\leq1$. Quindi f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.
(d) Il piano tangente al grafico di f in $(0,0)$ ha equazione $z=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y=2y$. Mentre quello in $(1,0)$ ha equazione $z=f(1,0)+f_x(1,0)(x-1)+f_y(1,0)y=2(x-1)+3y=2x+3y-2$.

Esercizio A2. [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iiint_D x^2(2x+y^2)\log(1+z^4)\ dxdydz\,,$$

dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le z, 0 \le z \le 2\}$.

Svolgimento: Posto $D(z) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le z\}$, $z \in [0,2]$, si ha

$$\begin{aligned}
\iiint_D x^2(2x+y^2)\log(1+z^4)\,dxdydz &\overset{(a)}{=} \int_0^2 \log(1+z^4)\left(\int_{D(z)} x^2y^2\,dxdy\right)dz \\
&\overset{(b)}{=} \int_0^2 \log(1+z^4)\left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}} \varrho^2\cos^2\vartheta\cdot\varrho^2\sin^2\vartheta\,\varrho d\varrho d\vartheta\right)dz \\
&\overset{(c)}{=} \int_0^2 \log(1+z^4)\left(\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4\vartheta}{8}\left[\frac{\varrho^6}{6}\right]_0^{\sqrt{z}} d\vartheta\right)dz = \frac{\pi}{24}\int_0^2 z^3\log(1+z^4)\,dz \\
&\overset{(d)}{=} \frac{\pi}{96}\int_1^{17}\log t\,dt \overset{(e)}{=} \frac{\pi}{96}\Big[t\log t - t\Big]_1^{17} = \frac{\pi}{96}(17\log 17 - 16)\,,
\end{aligned}$$

dove in (a) si sono usate le simmetrie, in (b) il cambiamento di variabili $x = \varrho\cos\vartheta$, $y = \varrho\sin\vartheta$, in (c) il risultato $\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta = \frac{1}{4}\sin^2(2\vartheta) = \frac{1}{8}(1-\cos 4\vartheta)$, in (d) il cambiamento di variabili $1+z^4 = t \implies 4z^3\,dz = dt$, e in (e) il risultato $\int \log t\,dt = t\log t - \int\,dt = t(\log t - 1) + C$.

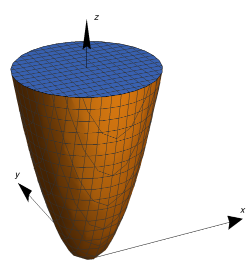

Figura 1: Dominio di integrazione

Esercizio A3. [punti 6] Sia data la forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = (3x^2 + 2yz)\,dx + (2xz + e^y)\,dy + 2xy\,dz.$$

(a) Verificare che ω è esatta nel suo dominio, determinando una sua funzione potenziale.
(b) Dato $\gamma(t) = \cos t\,\vec{\imath} + \sin t\,\vec{\jmath} + t\,\vec{k}$, $t \in [0, 3\pi]$, calcolare $\int_\gamma \omega$.

Svolgimento: (a) Indichiamo con $\vec{f}$ il campo vettoriale associato ad ω, e osserviamo che

$$\operatorname{rot} \vec{f}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2 + 2yz & 2xz + e^y & 2xy \end{vmatrix} = (2x - 2x)\vec{\imath} + (2y - 2y)\vec{\jmath} + (2z - 2z)\vec{k} = 0.$$

Poiché $\mathbb{R}^3$ è convesso, ω è esatta. Determiniamo la funzione potenziale U di ω. Deve essere $U_x(x, y, z) = 3x^2 + 2yz$, per cui $U(x, y, z) = x^3 + 2xyz + V(y, z)$, e deve essere $2xz + e^y = U_y(x, y, z) = 2xz + V_y(y, z)$, cioè $V_y(y, z) = e^y$, da cui segue che $V(y, z) = e^y + W(z)$. Infine, deve essere $2xy = U_z(x, y, z) = 2xy + V_z(x, y) = 2xy + W'(z)$, cioè $W'(z) = 0$, da cui segue che W è costante, e possiamo sceglierlo nullo. Allora $U(x, y, z) = x^3 + 2xyz + e^y$ è tale che $dU = \omega$.
(b) Si ha

$$\int_\gamma \omega = U(\gamma(3\pi)) - U(\gamma(0)) = U(-1, 0, 3\pi) - U(1, 0, 0) = -2.$$

Esercizio A4. [punti 6] Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx)\,.$$

(a) Determinare l'insieme di convergenza puntuale e $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.
(b) Determinare il generico intervallo di convergenza uniforme della successione.

Svolgimento: (a) Osserviamo che

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0, \end{cases}$$

e quindi la successione converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.
(b) Poiché f non è continua in $x = 0$, mentre le f_n lo sono, la convergenza non può essere uniforme in $\mathbb{R}$. Inoltre, per ogni $x \neq 0$, si ha

$$g_n(x) := |f_n(x) - f(x)| = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(n|x|)$$

che è una funzione pari di x, e decrescente in $(0, +\infty)$, come è mostrato in figura 2. Allora, per ogni $a > 0$, si ha

$$\sup_{|x|\geq a} |f_n(x) - f(x)| = g_n(a) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}(na) \to 0, \quad n \to \infty,$$

per cui $f_n \rightrightarrows f$ in $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$, per ogni $a > 0$.

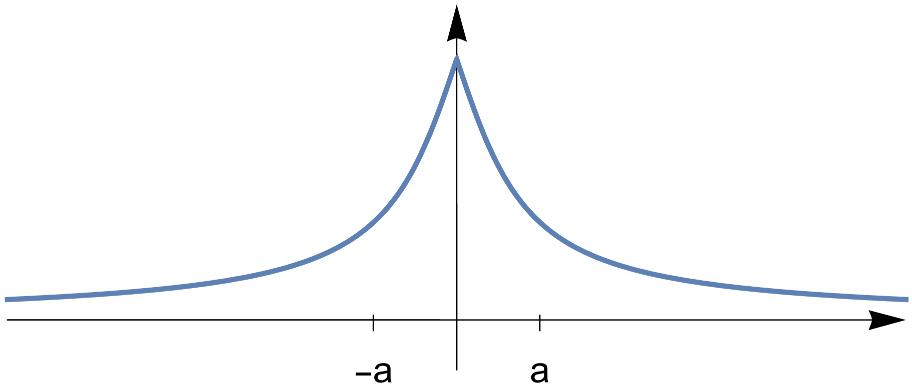

Figura 2: La funzione g_n

Esercizio A5. [punti 6] Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = -y\sqrt{1-x^2} \\ y' = x\sqrt{1-x^2} \end{cases} \tag{E}$$

determinare gli eventuali punti di equilibrio, e tracciare il diagramma di fase. Determinare la traiettoria di fase e la soluzione di (E) che soddisfano $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Svolgimento: Il sistema è della forma

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases}$$

dove $f, g \in C^0(D) \cap C^1(D^o)$, e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1]\}$.
(a) I punti di equilibrio nel piano delle fasi sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x' = -y\sqrt{1-x^2} = 0 \\ y' = x\sqrt{1-x^2} = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0) \ \vee x = -1 \ \vee \ x = 1.$$

Le altre traiettorie di fase sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} y \neq 0 \\ y'(x) = -\frac{x}{y} \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ x'(y) = -\frac{y}{x}. \end{cases}$$

Integrando si ottiene $\int y\,dy = -\int x\,dx \iff \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c \iff y^2 = -x^2 + C$, cioè le curve

$$x^2 + y^2 = C, \qquad C > 0,$$

che si possono rappresentare come $y(x) = \pm\sqrt{C - x^2}$, oppure come $x(y) = \pm\sqrt{C - y^2}$, con $C > 0$.
Osserviamo che D è unione disgiunta delle orbite

$\{(0,0)\}$,

$\{(-1,y)\}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$,

$\{(1,y)\}, \quad \forall y \in \mathbb{R}$,

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = C\}, \quad \forall C \in (0,1)$,

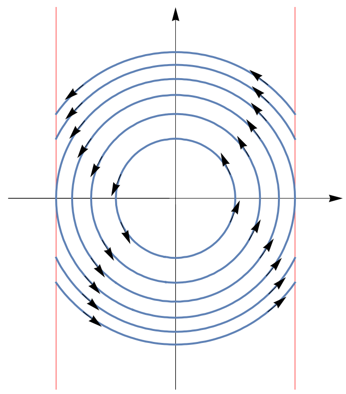

Figura 3: Diagramma di fase

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm\sqrt{C - x^2}, x \in (-1,1)\}, \quad \forall C \geq 1.$$

Il diagramma di fase è riportato in figura 3.
(b) Per determinare la traiettoria di fase richiesta, imponiamo la condizione iniziale $y(0) = 1$, e otteniamo $x^2 + y^2 = 1$, per cui $y(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in (-1,1)$.
Cerchiamo infine la soluzione di (E) che soddisfa le condizioni iniziali. Deve essere $x' = -y(x) = x^2 - 1$, per cui

$$t + c = \int dt = \int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$$
$$\iff ke^{2t} = \frac{x-1}{x+1} \iff x = \frac{1+ke^{2t}}{1-ke^{2t}}\,.$$

Dalla condizione iniziale $x(0) = 0$ segue $k = -1$, per cui

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}}, \\ y(t) = \sqrt{1 - x(t)^2} = \dfrac{2e^{2t}}{1 + e^{2t}}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$