CORSO DI STUDI IN FISICA – CALCOLO 2 (6/2/2025)

*Risposte non giustificate non verranno considerate. Consegnare solo la “bella copia”.
Scrivere anche sul retro del foglio.*

Cognome:	1	
	2	
Nome:	3	
	4	
Matricola:	5	
	TOTALE	

Versione A

Esercizio A1. [punti 6] Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità di

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \log(x^2 + y^2) + x^3 y + 2y & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Determinare l'eventuale equazione del piano tangente al grafico nei punti $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

Svolgimento:

Esercizio A2. [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iiint_D x^2(2x + y^2) \log(1 + z^4) \, dx dy dz,$$

dove $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z, 0 \leq z \leq 2\}$.

Svolgimento:

Esercizio A3. [punti 6] Sia data la forma differenziale

$$\omega(x, y, z) = (3x^2 + 2yz) dx + (2xz + e^y) dy + 2xy dz.$$

(a) Verificare che ω è esatta nel suo dominio, determinando una sua funzione potenziale.

(b) Dato $\gamma(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j} + t \vec{k}$, $t \in [0, 3\pi]$, calcolare $\int_{\gamma} \omega$.

Svolgimento:

Esercizio A4. [punti 6] Sia data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx).$$

- (a) Determinare l'insieme di convergenza puntuale e $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
(b) Determinare il generico intervallo di convergenza uniforme della successione.

Svolgimento:

Esercizio A5. [punti 6] Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = -y\sqrt{1-x^2} \\ y' = x\sqrt{1-x^2} \end{cases} \quad (E)$$

determinare gli eventuali punti di equilibrio, e tracciare il diagramma di fase. Determinare la traiettoria di fase e la soluzione di (E) che soddisfano $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Svolgimento: