

Esercizio A1. [punti 6] Data la seguente funzione

$$f(x, y) = \log(1 + y^2) + x^2 - \frac{y^2}{2}$$

- (a) determinarne i punti stazionari e la loro natura,
 (b) determinare massimo e minimo di f in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Svolgimento: (a) I punti stazionari sono soluzioni di

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 2x = 0 \\ f_y(x, y) = \frac{2y}{1+y^2} - y = \frac{y(1-y^2)}{1+y^2} = 0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $(0, 0)$, $(0, \pm 1)$. Poiché

$$f_{xx}(x, y) = 2 \quad f_{xy}(x, y) = 0 \quad f_{yy}(x, y) = \frac{2(1-y^2)}{(1+y^2)^2} - 1$$

ne segue che

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_f(0, \pm 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

per cui $(0, 0)$ è un punto di minimo locale, mentre $(0, \pm 1)$ sono punti di sella.

(b) Poiché D è chiuso e limitato e f è continua su D , il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D . Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

(b1) tra i punti stazionari interni a D . In questo caso, $(0, 0) \in D^\circ$.

(b2) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f . In questo caso non ci sono.

(b3) tra i punti di frontiera di D . Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Osserviamo che $\mathcal{F}D$ è costituita dalla circonferenza $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per studiare $f|_C$, e ci accontentiamo di trovare i punti stazionari della Lagrangiana [tra questi ci saranno anche i punti di massimo e minimo di $f|_C$]. Introduciamo la funzione di vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x, y) = 2x = 0 \\ g_y(x, y) = 2y = 0 \\ g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) = 2x + 2x\lambda = 2x(1 + \lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) = \frac{y(1-y^2)}{1+y^2} + 2y\lambda = y\left(\frac{1-y^2}{1+y^2} + 2\lambda\right) = \frac{y}{1+y^2}((2\lambda - 1)y^2 + 2\lambda + 1) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 0 = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ \frac{1-y^2}{1+y^2} + 2\lambda = 0 \\ y = \pm 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = -1 \\ y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = -1 \\ 3y^2 + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

cioè i punti $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$, perché il primo e il quarto sistema sono assurdi.

(b3') **Soluzione alternativa.** Osservato che, sul vincolo, $y^2 = 1 - x^2$, otteniamo $h(x) := f(x, \pm 1 - x^2) = \log(2 - x^2) + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}$, $x \in [-1, 1]$. Poiché $h'(x) = \frac{2x}{x^2-2} + 3x = \frac{x(3x^2-4)}{x^2-2} = 0 \iff x = 0 \vee x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$ [che non sono interni all'intervallo], otteniamo i punti $(0, \pm 1)$, $(\pm 1, 0)$.

(b4) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(0, 0) = 0$, $f(0, \pm 1) = \log 2 - \frac{1}{2}$, $f(\pm 1, 0) = 1$. Quindi $\min_D f = 0$ e $\max_D f = 1$.

Esercizio A2. [punti 6] Calcolare il seguente integrale doppio improprio

$$\iint_D \frac{|y|}{\sqrt{x}} dx dy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq |y|\}$.

Svolgimento: La funzione integranda è positiva, per cui si può calcolare l'integrale usando un'eshaustione qualsiasi. Con riferimento alla figura 1, e passando in coordinate polari si ha, per ogni $a \in (0, 1)$, $D_{\vartheta}^a = \{(\varrho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : a \leq \varrho \leq 1, -\frac{\pi}{4} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4}\}$, e

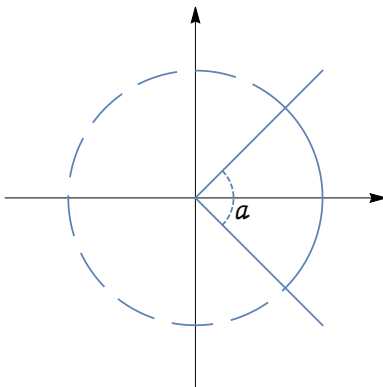


Figura 1: Dominio di integrazione

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{|y|}{\sqrt{x}} dx dy &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \iint_{D_{\vartheta}^a} \frac{\varrho |\sin \vartheta|}{\sqrt{\varrho \cos \vartheta}} \varrho d\varrho d\vartheta = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{|\sin \vartheta|}{\sqrt{\cos \vartheta}} d\vartheta \int_a^1 \varrho^{3/2} d\varrho \\ &\stackrel{(a)}{=} \left[\frac{2}{5} \varrho^{5/2} \right]_0^1 \cdot 2 \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \frac{4}{5} \left[2\sqrt{t} \right]_{\sqrt{2}/2}^1 = \frac{8}{5} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned}$$

dove in (a) si è eseguito il cambiamento di variabili $t = \cos \vartheta \implies dt = -\sin \vartheta d\vartheta$, e si è usata la parità della funzione integranda.

Il dominio D è riportato in figura 1.

Esercizio A3. [punti 6] Siano

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 4\},$$

e S la superficie laterale di T , orientata nel verso della normale esterna al solido T .

(a) Disegnare S .

(b) Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y, z) = 2x^2ye^{y^2} \vec{i} - 2xe^{y^2} \vec{j} + \sqrt{5 - x^2 - y^2} \vec{k}$$

attraverso la superficie S^+ .

Svolgimento: Sia $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, z = 4\}$, per cui $\partial T = S \cup S_1$. Una parametrizzazione di S_1 è $\Phi^1(x, y) = (x, y, 4)$, $(x, y) \in A_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$, il cui

vettore normale è $\Phi_x^1 \wedge \Phi_y^1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}$, che è esterno a T .

La superficie S , e la normale esterna, è riportata in figura 2.

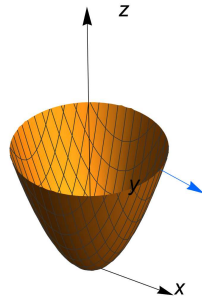


Figura 2: La superficie S

Dal teorema della divergenza si ha

$$\iiint_T \operatorname{div} \vec{F} \, dx dy dz = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, d\sigma + \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, d\sigma,$$

dove $\vec{n}_e$ è il versore normale esterno rispetto a T . Poiché $\operatorname{div} F = 4xye^{y^2} - 4xye^{y^2} = 0$, si ha

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, d\sigma &= \iiint_T \operatorname{div} \vec{F} \, dx dy dz - \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, d\sigma \\ &= - \iint_{A_1} \vec{F}(x, y, 4) \cdot \vec{k} \, dx dy \\ &\stackrel{(a)}{=} - \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 \sqrt{5 - \varrho^2} \, \varrho d\varrho \right) d\vartheta \\ &\stackrel{(c)}{=} -\pi \int_1^5 \sqrt{t} \, dt = -\pi \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \right]_1^5 = -\frac{2\pi}{3} (5\sqrt{5} - 1), \end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambio di coordinate $x = \varrho \cos \vartheta$, $z = \varrho \sin \vartheta$, e in (b) il cambio di variabili $5 - \varrho^2 = t$.

Esercizio A4. [punti 6] Sia data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/3}} \left(\frac{2-x}{x} \right)^n, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

- (a) Determinare gli insiemi di convergenza puntuale (o semplice) e assoluta.
 (b) Determinare il generico intervallo di convergenza uniforme della serie.

Svolgimento: Posto $y = \varphi(x) = \frac{2-x}{x}$, e $a_n := \frac{(-1)^n}{n^{1/3}}$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$, che è una serie di potenze, il cui raggio di convergenza ϱ è dato da

$$\frac{1}{\varrho} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(n^{1/n})^{1/3}} = 1.$$

Allora la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y^n$ converge assolutamente in $(-1, 1)$, e non converge in $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$. Per $y = 1$ si ha $a_n = \frac{(-1)^n}{n^{1/3}}$, e quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (non assolutamente) per il criterio di Leibniz, in quanto $|a_n| = \frac{1}{n^{1/3}}$ è decrescente ed infinitesima. Per $y = -1$, si ha $a_n = \frac{1}{n^{1/3}}$, e quindi la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ non converge. Quindi la serie converge assolutamente in $(-1, 1)$, e semplicemente in $(-1, 1]$, e non converge altrove. Infine, per il teorema di Abel, la serie di potenze $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{1/3}} y^n$ converge uniformemente in $[-1 + \delta, 1]$, per ogni $\delta > 0$. Per quanto riguarda la serie data, poiché

$$-1 < \frac{2-x}{x} \leq 1 \iff \begin{cases} \frac{2-x}{x} + 1 > 0 \\ \frac{2-x}{x} - 1 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{2}{x} > 0 \\ \frac{2(1-x)}{x} \leq 0 \end{cases} \iff x \geq 1,$$

la serie data converge assolutamente in $(1, +\infty)$, e semplicemente in $[1, +\infty)$. Poiché

$$-1 + \delta \leq \left(\frac{2-x}{x} \right)^3 \leq 1 \iff \begin{cases} \frac{2-x}{x} + 1 - \delta \geq 0 \\ \frac{2-x}{x} - 1 \leq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{2-\delta x}{x} \geq 0 \\ x \geq 1 \end{cases} \iff 1 \leq x \leq \frac{2}{\delta},$$

la serie data converge uniformemente in $[1, b]$, per ogni $b > 1$.

Esercizio A5. [punti 6] Sia data l'equazione differenziale

$$u'' = -\frac{(u')^2}{u}.$$

(a) Determinarne i punti di equilibrio, e tracciarne il diagramma di fase.

(b) Determinare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $u(0) = 1$, $u'(0) = 2$.

Svolgimento: (a) Introducendo le variabili $x = u$, $y = u'$, l'equazione differenziale si trasforma nel sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{y^2}{x}. \end{cases}$$

I punti di equilibrio nel piano delle fasi sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ -\frac{y^2}{x} = 0 \end{cases} \iff y = 0, x \neq 0.$$

Le traiettorie di fase sono soluzioni dell'equazione differenziale $\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = -\frac{y}{x}$. Integrando si ottiene $\log |y| = -\log |x| + c \iff y = \frac{C}{x}$, $C \in \mathbb{R}$. Il diagramma di fase è riportato in figura 3, per $C \in \{-4, -3, \dots, 4\}$.

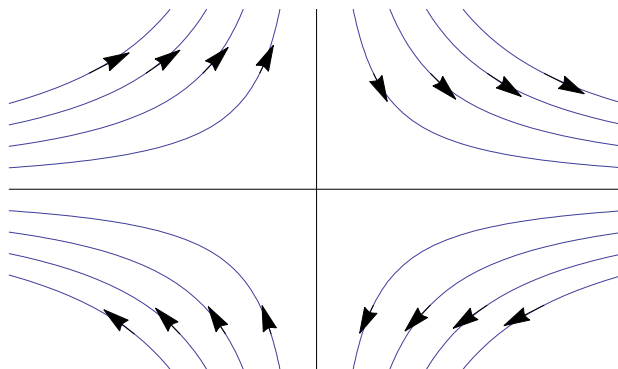


Figura 3: Diagramma di fase per l'esercizio (5)

(b) Per determinare la soluzione del problema di Cauchy proposto, imponiamo la condizione iniziale $y(1) = 2$, ottenendo $C = 2$, per cui $y(x) = \frac{2}{x}$, $x \neq 0$. Ricordando che $(x, y) = (u, u')$, si ottiene l'equazione differenziale $u' = \frac{2}{u}$, e bisogna risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \frac{2}{u} \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

La soluzione è $\int u \, dy = 2t + c \iff \frac{1}{2}u^2 = 2t + c$, e imponendo la condizione iniziale si ha $c = \frac{1}{2}$, per cui $u(t) = \sqrt{4t + 1}$, $t > -\frac{1}{4}$.