# Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (11/1/2024)

**Esercizio A1.** [punti 6] Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità di

$$x\sqrt{x^2+(y-3)^4},$$

Determinare l'eventuale equazione del piano tangente al grafico di $f$ in $(1,3)$.

**Esercizio A2.** [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{xy^2}{x^2+4y^2}\,dxdy\ ,$$

dove $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{1}{4}x^2+y^2\le 1, x\ge 0\}$.

**Esercizio A3.** [punti 6] Siano

$$T=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le z\le 4+x^2+y^2,\ x^2+y^2\le 1\right\},$$

e $S$ la superficie unione della superficie laterale di $T$ e della base superiore di $T$ [cioè, $S$ è la superficie totale di $T$ meno la base inferiore di $T$], orientata nel verso della normale esterna al solido $T$.
$(a)$ Disegnare $T$.
$(b)$ Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z)=\log(1+x^2+y^2)\vec{\imath}+x^3z^2\vec{\jmath}+2y^2z^3\vec{k}$$

attraverso la superficie $S^+$.

**Esercizio A4.** [punti 6] Data la successione di funzioni

$$f_n(x)=nxe^{-2n^2x^2}\ ,\quad x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N},$$

$(a)$ determinare l'insieme di convergenza puntuale e $f(x):=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$,
$(b)$ determinare il generico intervallo di convergenza uniforme della successione.

**Esercizio A5.** [punti 6] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=Ay \\ y(0)=y_0 \end{cases}\qquad A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ y_0=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Esercizio A1.** [punti 6] Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità di

$$x\sqrt{x^2+(y-3)^4},$$

Determinare l'eventuale equazione del piano tangente al grafico di $f$ in $(1,3)$.

**Svolgimento:** $(a)$ La continuità di $f$ in $\mathbb{R}^2$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue.
$(b)$ Calcoliamo le derivate parziali in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,3)\}$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \sqrt{x^2+(y-3)^4}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+(y-3)^4}} = \frac{2x^2+(y-3)^4}{\sqrt{x^2+(y-3)^4}}\,, \\ f_y(x,y) &= \frac{2x(y-3)^3}{\sqrt{x^2+(y-3)^4}}\,. \end{aligned}$$

Quindi le derivate parziali sono continue in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,3)\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Calcoliamole in $(0,3)$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(0,3) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t,3)-f(0,3)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t|t|}{t} = 0, \\ f_y(0,3) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0,3+t)-f(0,3)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

$(c)$ Infine, $f$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,3)\}$, perché ivi $f$ è di classe $C^1$. In $(0,3)$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,3)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+(y-3)^2}} = \lim_{\varrho\to 0}\varrho\cos\vartheta\sqrt{\cos^2\vartheta+\varrho^2\sin^4\vartheta} = 0,$$

perché $\varrho\to 0$ e $|\cos\vartheta|\sqrt{\cos^2\vartheta+\varrho^2\sin^4\vartheta}\le\sqrt{2}$, per ogni $\varrho\in(0,1]$, e $\vartheta\in[0,2\pi]$. Quindi $f$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.
$(d)$ Poiché $f$ è differenziabile in $(1,3)$, il grafico di $f$ ha piano tangente $z=1+2(x-1)=2x-1$ nel punto $(1,3)$.

**Esercizio A2.** [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{xy^2}{x^2+4y^2}\,dxdy\ ,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4}x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$.

**Svolgimento:** Si ha

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{xy^2}{x^2+4y^2}\,dxdy &\overset{(a)}{=} \lim_{a\to 0^+} \iint_{D^a} \frac{xy^2}{x^2+4y^2}\,dxdy \overset{(b)}{=} \lim_{a\to 0^+} \iint_{D^a_{\varrho,\vartheta}} \frac{2\varrho^3\cos\vartheta\sin^2\vartheta}{4\varrho^2}\,2\varrho\,d\varrho d\vartheta \\ &= \lim_{a\to 0^+} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta\sin^2\vartheta\,d\vartheta\right)\left(\int_a^1 \varrho^2\,d\varrho\right) \overset{(c)}{=} \left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_{\varrho=0}^{\varrho=1} \int_{-1}^1 z^2\,dz \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{2}{9},\end{aligned}$$

dove in $(a)$ si è introdotto l'insieme $D^a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leq \frac{1}{4}x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$, in $(b)$ si è usato il cambio di variabile $x = 2\varrho\cos\vartheta$, $y = \varrho\sin\vartheta$, per cui

$$D^2_{\varrho\vartheta} = \{(\varrho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : a \leq \varrho \leq 1, \vartheta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\},$$

e in $(c)$ la sostituzione $\sin\vartheta = z \implies \cos\vartheta\,d\vartheta = dz$.
Il dominio $D$ è riportato in figura 1.

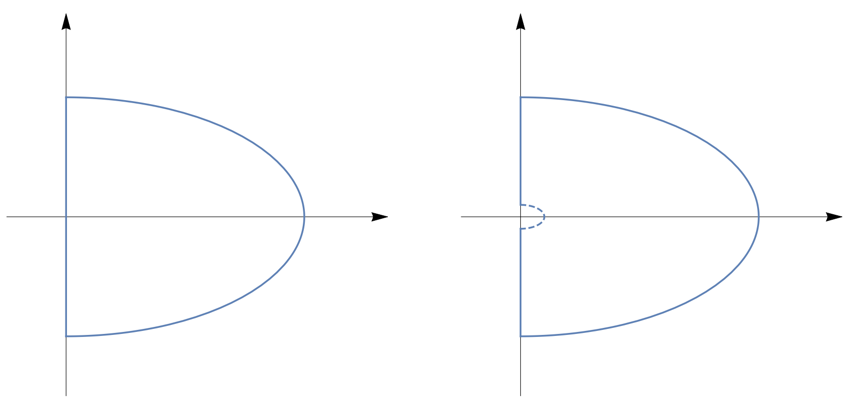

Figura 1: I domini d'integrazione $D$ e $D^a$

**Esercizio A3.** [punti 6] Siano

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 + x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\},$$

e $S$ la superficie unione della superficie laterale di $T$ e della base superiore di $T$ [cioè, $S$ è la superficie totale di $T$ meno la base inferiore di $T$], orientata nel verso della normale esterna al solido $T$.
$(a)$ Disegnare $T$.
$(b)$ Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = \log(1+x^2+y^2)\vec{\imath} + x^3z^2\vec{\jmath} + 2y^2z^3\vec{k}$$

attraverso la superficie $S^+$.

**Svolgimento:** Sia $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 1, z=0\}$, per cui $\partial T = S \cup S_1$. Una parametrizzazione di $S_1$ è $\Phi^1(x,y) = (x,y,0)$, $(x,y) \in A_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\}$, il cui vettore normale è $\Phi^1_x \wedge \Phi^1_y = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}$, che è interno a $T$.

La superficie $S$, e la normale esterna, è riportata in figura 2. È stata disegnata solo una porzione della superficie laterale, per poter mostrare la base superiore di $T$.

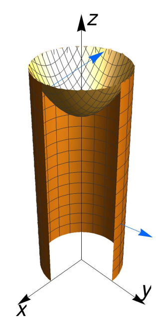


Figura 2: La superficie $S$

Dal teorema della divergenza si ha

$$\iiint_T \operatorname{div} \vec{F}\, dxdydz = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, d\sigma + \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, d\sigma,$$

dove $\vec{n}_e$ è il versore normale esterno rispetto a $T$. Poiché $\operatorname{div} F = \frac{2x}{1+x^2+y^2} + 6y^2z^2$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, d\sigma &= \iiint_T \operatorname{div} \vec{F}\, dxdydz - \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, d\sigma \\
&= \iiint_T \Big( \frac{2x}{1+x^2+y^2} + 6y^2z^2 \Big)\, dxdydz + \iint_{A_1} \vec{F}(x,y,0) \cdot \vec{k}\, dxdy \\
&\overset{(a)}{=} \iint_{A_1} \Big( \int_0^{4+x^2+y^2} 6y^2z^2 \, dz \Big)\, dxdy = \iint_{A_1} 2y^2 \big[z^3\big]_{z=0}^{z=4+x^2+y^2} \, dxdy \\
&= \iint_{A_1} 2y^2(4+x^2+y^2)^3 \, dxdy \overset{(b)}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 2\varrho^2 \sin^2\vartheta (4+\varrho^2)^3 \, \varrho d\varrho d\vartheta \\
&\overset{(c)}{=} \Big[\frac{1}{2}\vartheta - \frac{1}{4}\sin(2\vartheta)\Big]_0^{2\pi} \int_0^1 t(4+t)^3 \, dt = \pi \Big[\frac{1}{5}t^5 + 3t^4 + 16t^3 + 32t^2\Big]_0^1 = \frac{256}{5}\pi,
\end{aligned}$$

dove in $(a)$ si sono usate le simmetrie della funzione e del dominio, in $(b)$ si è usato il cambio di coordinate $x = \varrho\cos\vartheta$, $z = \varrho\sin\vartheta$, e in $(c)$ l'identità trigonometrica $\sin^2\vartheta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2\vartheta)$ e il cambio di variabili $\varrho^2 = t$.

**Esercizio A4.** [punti 6] Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = nxe^{-2n^2x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

$(a)$ determinare l'insieme di convergenza puntuale e $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$,
$(b)$ determinare il generico intervallo di convergenza uniforme della successione.

**Svolgimento:** Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, e quindi la successione converge per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poiché

$$f_n'(x) = ne^{-2n^2x^2}(1 - 4n^2x^2) \geq 0 \iff x \in [-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}],$$

si ha $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = f_n(\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2\sqrt{e}} \not\to 0$, per cui $f_n \not\rightrightarrows f$ in $\mathbb{R}$. Inoltre, per ogni $a > 0$, e $n > \frac{1}{2a}$, $f_n$ è decrescente in $[a, +\infty)$, per cui

$$\sup_{|x|\geq a} |f_n(x) - f(x)| = f_n(a) \to 0,$$

e quindi $f_n \rightrightarrows f$ in $(-\infty, -a] \cup [a, +\infty)$, per ogni $a > 0$.

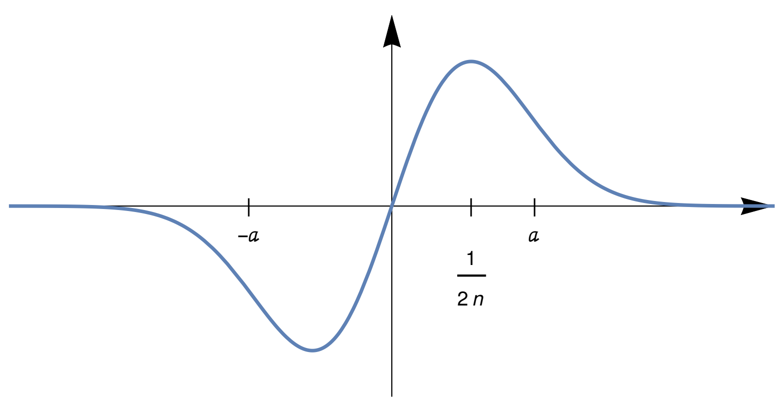


Figura 3: La funzione $f_n$

**Esercizio A5.** [punti 6] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Svolgimento:** Cerchiamo gli autovalori di $A$:
$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 3 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(3-\lambda)^2 - 1 - 3 + 3(3-\lambda) + \lambda + (3-\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 12\lambda + 8 = (2-\lambda)^3 = 0$, da cui si ottiene la soluzione $\lambda_1 = 2$ (tripla).
Autovettori per $\lambda_1 = 2$:

$$0 = (A - 2I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff x_1 - x_2 + 3x_3 = 0,\; x_1 - x_2 + 2x_3 = 0$$

$$\iff x_1 - x_2 = 0,\; x_3 = 0.$$

Poiché c'è un solo autovettore indipendente [due condizioni lineari significa che $\dim\ker(A - 2I) = 3 - 2 = 1$], occorre cercare gli autovettori generalizzati:

$$0 = (A-2I)^2\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff x_1 - x_2 + 2x_3 = 0,$$

e quindi scegliamo $\vec{v}_3 = \vec{e}_1 \notin \ker(A-2I)^2$, per cui $\vec{v}_2 = (A-2I)\vec{v}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - \vec{e}_3$, e $\vec{v}_1 = (A-2I)\vec{v}_2 = -\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.
Da $y_0 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$ si ricava

$$\begin{cases} 1 = y_1(0) = -c_1 + c_2 + c_3 \\ 1 = y_2(0) = -c_1 - c_2 \\ 1 = y_3(0) = -c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 2. \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi:

$$\begin{aligned} y(t) = e^{At}y_0 &= c_1e^{At}\vec{v}_1 + c_2e^{At}\vec{v}_2 + c_3e^{At}\vec{v}_3 \\ &= c_1e^{2t}\vec{v}_1 + c_2e^{2t}\big(I + (A-2I)t\big)\vec{v}_2 + c_3e^{2t}\Big(I + (A-2I)t + (A-2I)^2\frac{t^2}{2}\Big)\vec{v}_3 \\ &= \Big(c_1 + c_2t + \frac{c_3}{2}t^2\Big)e^{2t}\vec{v}_1 + (c_2 + c_3t)e^{2t}\vec{v}_2 + c_3e^{2t}\vec{v}_3 \\ &= (-t + t^2)e^{2t}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1 + 2t)e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (1 + 3t - t^2)e^{2t} \\ y_2(t) &= (1 - t - t^2)e^{2t} \\ y_3(t) &= (1 - 2t)e^{2t}. \end{aligned}$$

# Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (6/2/2024)

**Esercizio A1.** [punti 6] Data la seguente funzione

$$\log(1+x^2+y^2)+x^2-y^2$$

determinare massimo e minimo di $f$ in $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$.

**Esercizio A2.** [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iiint_D \frac{x+y+z}{1+x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$$

dove $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq 1, x\geq 0\}$.

**Esercizio A3.** [punti 6] Sia data la forma differenziale

$$\left(\frac{3y}{(x-1)^2+y^2}+y\right)dx+\left(x-\frac{3(x-1)}{(x-1)^2+y^2}\right)dy.$$

$(a)$ Verificare se $\omega$ è chiusa e/o esatta nel suo dominio.
$(b)$ Disegnare $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|\leq\sin(\frac{\pi}{2}x), 0\leq x\leq 2\}$, e calcolare $\int_{\partial^+D}\omega$.

**Esercizio A4.** [punti 6] Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(5+n!)\left(\frac{x-4}{x}\right)^{n^2}, \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$

$(a)$ determinare gli insiemi di convergenza puntuale (o semplice) e assoluta,
$(b)$ determinare il generico insieme di convergenza uniforme della serie.

**Esercizio A5.** [punti 6] Data l'equazione differenziale

$$u''=\frac{(u')^2-1}{2u},$$

$(a)$ determinarne i punti di equilibrio, e tracciarne il diagramma di fase,
$(b)$ determinare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $u(0)=3$, $u'(0)=2$.

Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (6/2/2024)

**Esercizio A1.** [punti 6] Data la seguente funzione

$$\log(1+x^2+y^2)+x^2-y^2$$

determinare massimo e minimo di $f$ in $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 1\}$.

**Svolgimento:** Poiché $D$ è chiuso e limitato e $f$ è continua su $D$, il teorema di Weierstrass ci assicura che $f$ ha massimo e minimo su $D$. Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:
$(a)$ tra i punti stazionari interni a $D$. Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x,y)\in D^o$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y)=\frac{2x}{1+x^2+y^2}+2x=0 \\ f_y(x,y)=\frac{2y}{1+x^2+y^2}-2y=0 \end{cases}$$

che fornisce il punto $(0,0)$.
$(b)$ tra i punti interni a $D$ in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di $f$. In questo caso non ci sono.
$(c)$ tra i punti di frontiera di $D$. Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Per determinare il massimo e il minimo di $f$ sull'insieme $S=\{(x,y)\in D : x^2+y^2=1\}$, usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e ci accontentiamo di trovare i punti stazionari della Lagrangiana [tra questi ci saranno anche i punti di massimo e minimo di $f|_S$].
Introduciamo la funzione di vincolo $g(x,y)=x^2+y^2-1$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y)=2x=0 \\ g_y(x,y)=2y=0 \\ g(x,y)=x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

che non ha soluzione.
Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) &= \frac{2x}{1+x^2+y^2}+2x+2x\lambda=2x(\frac{1}{1+x^2+y^2}+1+\lambda)=0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) &= \frac{2y}{1+x^2+y^2}-2y+2y\lambda=2y(\frac{1}{1+x^2+y^2}-1+\lambda)=0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x=0 \\ \frac{1}{1+y^2}-1+\lambda=0 \\ y^2-1=0 \end{cases}$$

$$\bigvee \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}+1+\lambda=0 \\ y=0 \\ x^2-1=0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} \frac{1}{1+x^2+y^2}+1+\lambda=0 \\ \frac{1}{1+x^2+y^2}-1+\lambda=0 \\ x^2+y^2-1=0. \end{cases}$$

Il primo sistema è assurdo. Il secondo fornisce i punti $P_\pm=(0,\pm 1)$. Il terzo fornisce i punti $Q_\pm=(\pm 1,0)$. Il quarto è assurdo.
$(d)$ Calcolando il valore di $f$ su tutti i punti trovati, otteniamo $f(O)=0$, $f(P_\pm)=\log 2-1$, $f(Q_\pm)=\log 2+1$. Quindi $\min_D f=\log 2-1$ e $\max_D f=\log 2+1$.

**Esercizio A2.** [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iiint_D \frac{x+y+z}{1+x^2+y^2+z^2}\, dxdydz$$

dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 1, x \ge 0\}$.

**Svolgimento:** Si ha

$$\begin{aligned}
\iiint_D \frac{x+y+z}{1+x^2+y^2+z^2}\, dxdydz &\overset{(a)}{=} \iiint_D \frac{x}{1+x^2+y^2+z^2}\, dxdydz \\
&\overset{(b)}{=} \iint_{D_{\varrho\vartheta\varphi}} \frac{\varrho\cos\vartheta\sin\varphi}{1+\varrho^2}\, \varrho^2 \sin\varphi \, d\varrho d\vartheta d\varphi \\
&= \int_0^{\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta \, d\vartheta \int_0^1 \frac{\varrho^3}{1+\varrho^2}\, d\varrho \\
&\overset{(c)}{=} \frac{\pi}{2}\cdot 2 \cdot \frac{1}{2}(1-\log 2) = \frac{\pi}{2}(1-\log 2),
\end{aligned}$$

dove in $(a)$ si sono usate le simmetrie del dominio e della funzione integranda, in $(b)$ è usato il cambio di variabile $x = \varrho\cos\vartheta\sin\varphi$, $y = \varrho\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = \varrho\cos\varphi$, per cui $D_{\varrho\vartheta\varphi} = \{(\varrho,\vartheta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 : \varrho \in [0,1], \vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \varphi \in [0,\pi]\}$, e in $(c)$ i risultati $\int_0^{\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta\, d\vartheta = \big[\sin\vartheta\big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2$, $\int_0^1 \frac{\varrho^3}{1+\varrho^2}\, d\varrho = \int_0^1 \left(\varrho - \frac{\varrho}{1+\varrho^2}\right) d\varrho = \left[\frac{1}{2}\varrho^2 - \frac{1}{2}\log(1+\varrho^2)\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1-\log 2)$.

**Esercizio A3.** [punti 6] Sia data la forma differenziale

$$\left(\frac{3y}{(x-1)^2+y^2}+y\right)dx+\left(x-\frac{3(x-1)}{(x-1)^2+y^2}\right)dy.$$

$(a)$ Verificare se $\omega$ è chiusa e/o esatta nel suo dominio.
$(b)$ Disegnare $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|y|\le\sin(\frac{\pi}{2}x),0\le x\le 2\}$, e calcolare $\int_{\partial^+D}\omega$.

**Svolgimento:** $(a)$ Posto $\omega(x,y)=f\,dx+g\,dy$, si ha $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{3(x-1)^2-3y^2}{((x-1)^2+y^2)^2}+1$, per cui $\omega$ è chiusa in $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$, che non è semplicemente connesso, e quindi non si può dire se $\omega$ è esatta.
$(b)$ Poiché $\omega$ è chiusa, usiamo l'invarianza omotopica dell'integrale di una forma chiusa per calcolare l'integrale rispetto a $\gamma_0(t)=(1+\cos t,\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$. Allora

$$\begin{aligned}\int_{\partial^+D}\omega&=\int_{\gamma_0}\omega=\int_0^{2\pi}\big(4\sin t(-\sin t)+(1-2\cos t)\cos t\big)\,dt=\int_0^{2\pi}\big(-2-2\sin^2 t+\cos t\big)\,dt\\&=-4\pi-\int_0^{2\pi}(1-\cos 2t)\,dt=-6\pi.\end{aligned}$$

Ma allora $\omega$ non è esatta nel suo dominio.
Il dominio $D$ è riportato in figura 1.

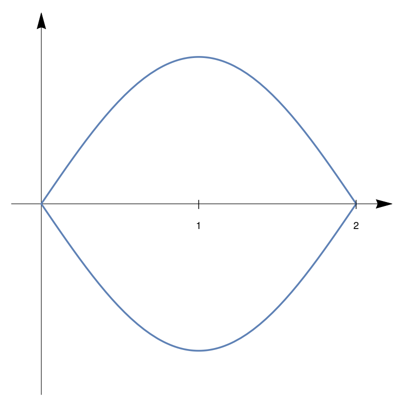


Figura 1: Il dominio $D$

**Esercizio A4.** [punti 6] Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(5+n!)\Big(\frac{x-4}{x}\Big)^{n^2}, \quad x\in\mathbb{R}\setminus\{0\},$$

$(a)$ determinare gli insiemi di convergenza puntuale (o semplice) e assoluta,
$(b)$ determinare il generico insieme di convergenza uniforme della serie.

**Svolgimento:** Posto $y=\varphi(x)=\frac{x-4}{x}$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty}(5+n!)y^{n^2}$, che è una serie di potenze. Per determinarne il raggio di convergenza osserviamo che

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(5+(n+1)!)|y|^{(n+1)^2}}{(5+n!)|y|^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(1+o(1))}{n!(1+o(1))}|y|^{2n+1}=\lim_{n\to\infty}n(1+o(1))|y|^{2n+1}$$
$$=\begin{cases}0, & |y|<1,\\ +\infty, & |y|\geq 1,\end{cases}$$

per cui la serie di potenze converge assolutamente per $y\in(-1,1)$, e non converge altrove, e converge uniformemente in $[-1+\delta,1-\delta]$, per ogni $\delta\in(0,1)$.
Poiché

$$-1<\frac{x-4}{x}<1 \iff \begin{cases}\frac{x-4}{x}+1>0\\ \frac{x-4}{x}-1<0\end{cases} \iff \begin{cases}\frac{2(x-2)}{x}>0\\ \frac{4}{x}>0\end{cases} \iff x>2,$$

la serie data converge assolutamente in $(2,+\infty)$. Poiché

$$-1+\delta\leq\frac{x-4}{x}\leq 1-\delta \iff \begin{cases}\frac{x-4}{x}+1-\delta\geq 0\\ \frac{x-4}{x}-1+\delta\leq 0\end{cases} \iff \begin{cases}\frac{(2-\delta)x-4}{x}\geq 0\\ \frac{\delta x-4}{x}\leq 0\end{cases} \iff \frac{4}{2-\delta}\leq x\leq\frac{4}{\delta},$$

la serie data converge uniformemente in $[a,b]$, per ogni $b>a>2$.

**Esercizio A5.** [punti 6] Data l'equazione differenziale

$$u''=\frac{(u')^2-1}{2u},$$

$(a)$ determinarne i punti di equilibrio, e tracciarne il diagramma di fase,
$(b)$ determinare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $u(0)=3$, $u'(0)=2$.

**Svolgimento:** $(a)$ Trasformiamo l'equazione in un sistema, introducendo le coordinate del piano delle fasi $x:=u$, $y:=u'$, e ottenendo

$$\begin{cases}x'=y\\ y'=\frac{y^2-1}{2x}.\end{cases}$$

I punti di equilibrio nel piano delle fasi sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases}x'=y=0\\ y'=\frac{y^2-1}{2x}=0\end{cases} \iff \nexists.$$

Le traiettorie di fase sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x)=\frac{y^2-1}{2xy}.$$

Integrando si ottiene

$$\int \frac{y\,dy}{y^2-1} = \int \frac{dx}{x} \iff \log|y^2-1| = \log|x| + c \iff y^2-1 = Cx, \qquad C \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Le orbite sono contenute nelle parabole $x = \frac{1}{C}(y^2-1)$, $\forall C \neq 0$. Il diagramma di fase è riportato in figura 2, per $C \in \{-4,-3,\dots,4\}$.

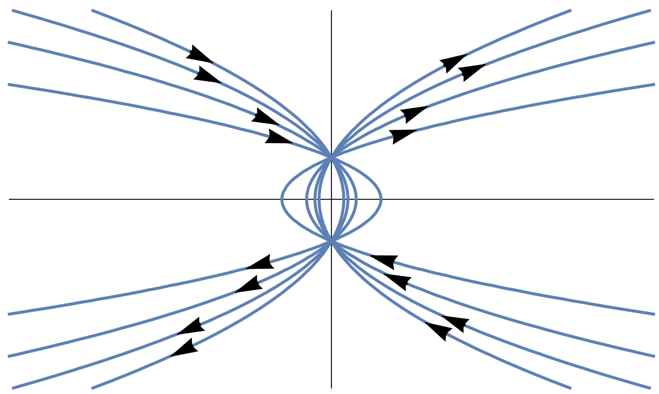

Figura 2: Diagramma di fase

$(b)$ Per determinare la soluzione del problema di Cauchy proposto, imponiamo la condizione iniziale $y(3) = 2$, ottenendo $C = 1$, per cui $y(x) = \sqrt{x+1}$, $x \in (0,+\infty)$. Ricordando che $(x,y) = (u,u')$, si ottiene l'equazione differenziale $u' = \sqrt{u+1}$, e bisogna risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \sqrt{u+1} \\ u(0) = 3. \end{cases}$$

La soluzione è $t + c = \int dt = \int \frac{du}{\sqrt{u+1}} = 2\sqrt{u+1} \iff u(t) = \frac{1}{4}(t+c)^2 - 1$, e imponendo la condizione iniziale si ha $c = 4$, per cui

$$u(t) = \frac{1}{4}t^2 + 2t + 3, \qquad t \in (-2,+\infty).$$

# Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (13/6/2024)

**Esercizio A1.** [punti 6] Data la seguente funzione

$$f(x,y) = xy^2 - 2x^2y^6$$

determinare massimo e minimo di $f$ in $D = [-1,1]^2$.

**Esercizio A2.** [punti 6] Sia data la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{x^3}{x^4+y^4} + 2x^2y^3\right) dx + \left(\frac{y^3}{x^4+y^4} + x^2\right) dy.$$

$(a)$ Verificare se $\omega$ è chiusa/esatta nel suo dominio.
$(b)$ Disegnare $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4, y \ge |x|\}$, e calcolare $\int_{\partial^+ D} \omega$.

**Esercizio A3.** [punti 6] Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = e^{x^2+y^2}\,\vec{\imath} + \operatorname{arctg}(yz)\,\vec{\jmath} + 2x^2z\,\vec{k}$$

attraverso la superficie laterale del solido

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{4}\,x^2 + y^2 + z^2 \le 1, y \ge 0\right\},$$

orientata nel verso della normale esterna al solido.

**Esercizio A4.** [punti 6] Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{5^n-4^n}(x^2-1)^n\,, \quad x \in \mathbb{R},$$

$(a)$ determinare gli insiemi di convergenza puntuale (o semplice) e assoluta,
$(b)$ determinare il generico insieme di convergenza uniforme della serie.

**Esercizio A5.** [punti 6] Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = -x^3y \\ y' = 2x^2y^2 \end{cases} \tag{E}$$

determinare gli eventuali punti di equilibrio, e tracciare il diagramma di fase. Determinare la traiettoria di fase e la soluzione di $(E)$ che soddisfano $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

**Esercizio A1.** [punti 6] Data la seguente funzione

$$f(x,y) = xy^2 - 2x^2y^6$$

determinare massimo e minimo di $f$ in $D = [-1,1]^2$.

**Svolgimento:** Poiché $D$ è chiuso e limitato e $f$ è continua su $D$, il teorema di Weierstrass ci assicura che $f$ ha massimo e minimo su $D$. Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:
($a$) tra i punti stazionari interni a $D$. Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x,y) \in D^o$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = y^2 - 4xy^6 = y^2(1-4xy^4) = 0 \\ f_y(x,y) = 2xy - 12x^2y^5 = 2xy(1-6xy^4) = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} y^2 = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y^2 = 0 \\ 1-6xy^4 = 0 \end{cases}$$
$$\bigvee \begin{cases} 1-4xy^4 = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} 1-4xy^4 = 0 \\ 1-6xy^4 = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema fornisce il punto $(0,0)$. Il secondo, il terzo e il quarto sono assurdi.
($b$) tra i punti interni a $D$ in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di $f$. In questo caso non ci sono.
($c$) tra i punti di frontiera di $D$. Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Studiamo, separatamente, il comportamento di $f$ sui quattro segmenti di retta che compongono $\mathcal{F}D$.
Poiché $g(x) := f(x,\pm1) = x - 2x^2$, $x \in [-1,1]$, e $g'(x) = 1 - 4x = 0 \iff x = \frac{1}{4}$, si hanno i punti $A = (-1,-1)$, $B = (1,-1)$, $C = (1,1)$, $D = (-1,1)$, e $P_\pm = (\frac{1}{4}, \pm1)$.
Poiché $h_+(y) = f(1,y) = y^2 - 2y^6$, $y \in [-1,1]$, e $h'_+(y) = 2y - 12y^5 = 2y(1-6y^4) = 0 \iff y = 0 \vee y = \pm\frac{1}{\sqrt[4]{6}}$, si hanno i punti $B, C$, e $Q_+ = (1,0)$, $R_\pm = (1, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{6}})$.
Poiché $h_-(y) = f(-1,y) = -y^2 - 2y^6$, $y \in [-1,1]$, e $h'_-(y) = -2y - 12y^5 = -2y(1+6y^4) = 0 \iff y = 0$, si hanno i punti $A, D$, e $Q_- = (-1,0)$.
($d$) Calcolando il valore di $f$ su tutti i punti trovati, otteniamo $f(O) = 0$, $f(A) = f(D) = -3$, $f(B) = f(C) = -1$, $f(P_\pm) = \frac{1}{8}$, $f(Q_\pm) = 0$, $f(R_\pm) = \frac{\sqrt{6}}{9}$. Quindi $\min_D f = -3$ e $\max_D f = \frac{\sqrt{6}}{9}$.

**Esercizio A2.** [punti 6] Sia data la forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{x^3}{x^4+y^4} + 2x^2y^3\right) dx + \left(\frac{y^3}{x^4+y^4} + x^2\right) dy.$$

$(a)$ Verificare se $\omega$ è chiusa/esatta nel suo dominio.
$(b)$ Disegnare $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4, y \ge |x|\}$, e calcolare $\int_{\partial^+ D} \omega$.

**Svolgimento:** $(a)$ Indichiamo con $\omega = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-4x^3y^3}{(x^4+y^4)^2} + 6x^2y^2$, mentre $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{-4x^3y^3}{(x^4+y^4)^2} + 2x$, $\omega$ non è chiusa in $D$.
$(b)$ Per calcolare l'integrale, usiamo il teorema di Gauss-Green, ottenendo

$$\begin{aligned}
\int_{\partial^+ D} \omega &= \iint_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy = \iint_D (2x - 6x^2y^2)\,dxdy \overset{(a)}{=} -6 \iint_{D_{\varrho\vartheta}} \varrho^4 \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta\, \varrho\, d\varrho d\vartheta \\
&= -\frac{3}{2}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^2 2\vartheta\, d\vartheta \int_1^2 \varrho^5\, d\varrho = -\frac{3}{4}\left[\frac{\varrho^6}{6}\right]_1^2 \int_{\pi/4}^{3\pi/4} (1-\cos 4\vartheta)\, d\vartheta \\
&= -\frac{63}{8}\left[\vartheta - \frac{1}{4}\sin 4\vartheta\right]_{\pi/4}^{3\pi/4} = -\frac{63}{16}\pi,
\end{aligned}$$

dove in $(a)$ si sono usate le simmetrie della funzione integranda e il cambio di variabile $x = \varrho\cos\vartheta$, $y = \varrho\sin\vartheta$, per cui $D_{\varrho\vartheta} = \{(\varrho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \varrho \in [1,2], \vartheta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]\}$.

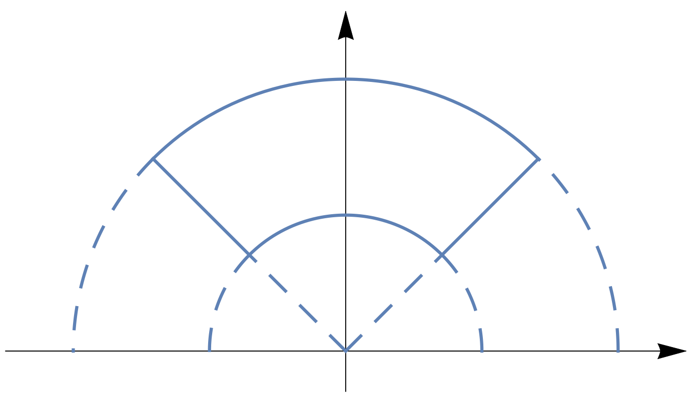

Figura 1: Il dominio $D$

**Esercizio A3.** [punti 6] Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = e^{x^2+y^2}\,\vec{\imath} + \operatorname{arctg}(yz)\,\vec{\jmath} + 2x^2 z\,\vec{k}$$

attraverso la superficie laterale del solido

$$T = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{4}\,x^2 + y^2 + z^2 \le 1, y \ge 0\right\},$$

orientata nel verso della normale esterna al solido.

**Svolgimento:** Sia $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{4}x^2 + z^2 \le 1, y = 0\}$, per cui $\partial T = S \cup S_1$. Una parametrizzazione di $S_1$ è $\Phi^1(x,z) = (x,0,z)$, $(x,z) \in A_1 := \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4}x^2 + z^2 \le 1\}$, il cui vettore normale è $\Phi^1_x \wedge \Phi^1_z = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{\jmath}$, che è esterno a $T$.

La superficie $S$, e la sua normale esterna, è riportata in figura 2.

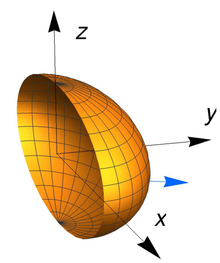


Figura 2: La superficie $S$

Dal teorema della divergenza si ha

$$\iiint_T \operatorname{div} \vec{F}\,dxdydz = \int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e\,d\sigma + \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_e\,d\sigma,$$

dove $\vec{n}_e$ è il versore normale esterno rispetto a $T$. Poiché $\operatorname{div} F = 2xe^{x^2+y^2} + \frac{z}{1+y^2z^2} + 2x^2$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e\,d\sigma &= \iiint_T \operatorname{div} \vec{F}\,dxdydz - \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_e\,d\sigma \\
&= \iiint_T \Big(2xe^{x^2+y^2} + \frac{z}{1+y^2z^2} + 2x^2\Big)\,dxdydz + \iint_{A_1} \vec{F}(x,0,z) \cdot \vec{\jmath}\,dxdy \\
&\overset{(a)}{=} \iiint_T 2x^2\,dxdydz \overset{(b)}{=} \iiint_{T_{\varrho\vartheta\varphi}} 8\varrho^2 \cos^2\vartheta \sin^2\varphi \cdot 2\varrho^2 \sin\varphi\,d\varrho d\vartheta d\varphi \\
&= 8 \int_0^\pi (1 + \cos 2\vartheta)\,d\vartheta \int_0^\pi (1 - \cos^2\varphi) \sin\varphi\,d\varphi \int_0^1 \varrho^4\,d\varrho \\
&= 8\Big[\vartheta + \frac{1}{2}\sin(2\vartheta)\Big]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} \Big[-\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi\Big]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \Big[\frac{1}{5}\varrho^5\Big]_{\varrho=0}^{\varrho=1} = \frac{32}{15}\pi,
\end{aligned}$$

dove in $(a)$ si sono usate le simmetrie della funzione e del dominio, in $(b)$ si è usato il cambio di coordinate $x = 2\varrho\cos\vartheta\sin\varphi$, $y = \varrho\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = \varrho\cos\varphi$, per cui $T_{\varrho\vartheta\varphi} = \{(\varrho,\vartheta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 : \varrho \in [0,1], \vartheta \in [0,\pi], \varphi \in [0,\pi]\}$.

**Esercizio A4.** [punti 6] Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{5^n - 4^n} (x^2 - 1)^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

($a$) determinare gli insiemi di convergenza puntuale (o semplice) e assoluta,
($b$) determinare il generico insieme di convergenza uniforme della serie.

**Svolgimento:** Posto $y = \varphi(x) = x^2 - 1$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{5^n-4^n} y^n$, che è una serie di potenze, il cui raggio di convergenza è dato da

$$\frac{1}{\varrho} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + 2^n}{5^n - 4^n}} = \frac{3}{5} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1 + (\frac{2}{3})^n}{1 - (\frac{4}{5})^n}} = \frac{3}{5},$$

per cui la serie di potenze converge assolutamente per $y \in (-\frac{5}{3}, \frac{5}{3})$, e non converge per $|y| > \frac{5}{3}$. Per $y = \frac{5}{3}$, la serie di potenze diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{5^n-4^n} \left(\frac{5}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+(\frac{2}{3})^n}{1-(\frac{4}{5})^n}$, e la serie non converge, perché $a_n \not\to 0$. Per $y = -\frac{5}{3}$, la serie di potenze diventa $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{3^n+2^n}{5^n-4^n} \left(\frac{5}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1+(\frac{2}{3})^n}{1-(\frac{4}{5})^n}$, e la serie non converge, perché $a_n \not\to 0$.
Infine, la serie di potenze converge uniformemente in $[-\frac{5}{3} + \delta, \frac{5}{3} - \delta]$, per ogni $\delta \in (0, 1)$.
Poiché

$$-\frac{5}{3} < x^2 - 1 < \frac{5}{3} \iff x^2 < \frac{8}{3} \iff |x| < \sqrt{\frac{8}{3}},$$

la serie data converge assolutamente in $(-\sqrt{\frac{8}{3}}, \sqrt{\frac{8}{3}})$, e non converge altrove. Poiché

$$-\frac{5}{3} + \delta \le x^2 - 1 \le \frac{5}{3} - \delta \iff x^2 \le \frac{8}{3} - \delta \iff |x| \le \sqrt{\frac{8}{3} - \delta},$$

la serie data converge uniformemente in $[-\sqrt{\frac{8}{3}} + \delta', \sqrt{\frac{8}{3}} - \delta']$, per ogni $\delta' > 0$.

**Esercizio A5.** [punti 6] Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = -x^3 y \\ y' = 2x^2 y^2 \end{cases} \tag{E}$$

determinare gli eventuali punti di equilibrio, e tracciare il diagramma di fase. Determinare la traiettoria di fase e la soluzione di $(E)$ che soddisfano $x(0) = 1$, $y(0) = 2$.

**Svolgimento:** I punti di equilibrio nel piano delle fasi sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x' = -x^3 y = 0 \\ y' = 2x^2 y^2 = 0 \end{cases} \iff x = 0 \ \vee \ y = 0.$$

Le traiettorie di fase sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} xy \neq 0 \\ y'(x) = \frac{2x^2y^2}{-x^3y} = -\frac{2y}{x} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} xy \neq 0 \\ x'(y) = -\frac{x}{2y}. \end{cases}$$

Integrando la prima equazione si ottiene $y = 0$, che non è ammissibile, e

$$\int \frac{1}{y}\, dy = -\int \frac{2}{x}\, dx \iff \log|y| = -2\log|x| + C,$$

cioè i grafici delle funzioni

$$y(x) = \frac{C}{x^2}, \qquad \forall C \neq 0,$$

mentre, integrando la seconda equazione si ottiene $x = 0$, che non è ammissibile, e le funzioni $x(y) = \frac{C}{\sqrt{|y|}}$, che già conosciamo.
Osserviamo che $\mathbb{R}^2$ è unione disgiunta delle orbite

$$\{(x, 0)\}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\{(0, y)\}, \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

$$\{(x, \tfrac{C}{x^2}) : x < 0\}, \quad \forall C \neq 0,$$

$$\{(x, \tfrac{C}{x^2}) : x > 0\}, \quad \forall C \neq 0.$$

Il diagramma di fase è riportato in figura 3.

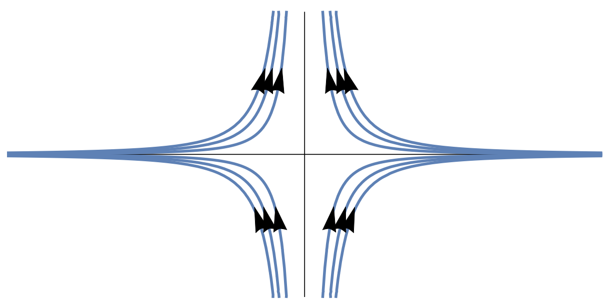

Figura 3: Diagramma di fase

Per determinare la traiettoria di fase richiesta, imponiamo il passaggio per $(x_0, y_0) = (1, 2)$, cioè $2 = C$, ottenendo $y(x) = \frac{2}{x^2}$, $x > 0$.
Cerchiamo infine la soluzione di $(E)$ che soddisfa le condizioni iniziali. Deve essere

$$x' = -x^3 y(x) = -\frac{2x^3}{x^2} = -2x, \qquad x > 0,$$

e integrando si ottiene $t + c = -\int \frac{1}{2x}\, dx = -\frac{1}{2}\log|x|$, e dalla condizione iniziale $x(0) = 1$ segue $c = 0$, per cui

$$\begin{cases} x(t) = e^{-2t}, & t \in \mathbb{R}, \\ y(t) = \dfrac{2}{x(t)^2} = 2e^{4t}, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

# Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (11/7/2024)

**Esercizio A1.** [punti 6] Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità di

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(x^3)}{(x^2+y^2)^{3/2}}+2x^2+y\,, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

Determinare l'eventuale equazione del piano tangente al grafico di $f$ in $(0,0)$.

**Esercizio A2.** [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iiint_D \left(|x|e^{z^2}+y\sin x - x\sin y\right)\,dxdydz\,,$$

dove $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le z^2, 1\le z\le 2\}$.

**Esercizio A3.** [punti 6] Siano $S$ il grafico della funzione

$$z=x(x^2+2y^2),\qquad (x,y)\in D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1\},$$

orientata dal versore normale $\vec{n}$ tale che $\vec{n}\cdot\vec{k}>0$, e $\vec{F}$ il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z)=x^2y\,\vec{\imath}+x\,\vec{\jmath}+z^2\,\vec{k}$$

Calcolare la circuitazione [o lavoro] $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\gamma}$ di $\vec{F}$ lungo il bordo positivo della superficie $S$.

**Esercizio A4.** [punti 6] Data la successione di funzioni

$$f_n(x)=\frac{1}{nx}\,e^{-1/(n^2x^2)}\,,\quad x\in(0,+\infty), n\in\mathbb{N},$$

$(a)$ determinare l'insieme di convergenza puntuale e $f(x):=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$,
$(b)$ determinare il generico intervallo di convergenza uniforme della successione.

**Esercizio A5.** [punti 6] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases}y'=Ay\\ y(0)=y_0\end{cases}\qquad A=\begin{pmatrix}2&0&1\\-2&0&-1\\0&0&2\end{pmatrix},\ y_0=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

# Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (11/7/2024)

**Esercizio A1.** [punti 6] Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità di

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos(x^3)}{(x^2+y^2)^{3/2}}+2x^2+y\,, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

Determinare l'eventuale equazione del piano tangente al grafico di $f$ in $(0,0)$.

**Svolgimento:** $(a)$ La continuità di $f$ in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. In $(0,0)$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^3)}{(x^2+y^2)^{3/2}}+2x^2+y=\frac{1}{2}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^6}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\frac{1}{2}\lim_{\varrho\to0}\varrho^3\cos^6\vartheta=0,$$

perché $\varrho^3\to0$ e $\cos^6\vartheta\leq1$. Quindi $f$ è continua in $\mathbb{R}^2$.
$(b)$ Calcoliamo le derivate parziali in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Si ha

$$f_x(x,y)=\frac{3x^2\sin(x^3)(x^2+y^2)^{3/2}-3x(x^2+y^2)^{1/2}\big(1-\cos(x^3)\big)}{(x^2+y^2)^3}+4x$$
$$f_y(x,y)=\frac{-3y(x^2+y^2)^{1/2}\big(1-\cos(x^3)\big)}{(x^2+y^2)^3}+1.$$

Quindi le derivate parziali sono anche continue in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Calcoliamole in $(0,0)$. Si ha

$$f_x(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{1-\cos t^3}{t|t|^3}+2t=\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\frac{t^6}{t|t|^3}=0$$
$$f_y(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{t}{t}=1.$$

$(c)$ Infine, $f$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, perché le derivate parziali sono continue in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. In $(0,0)$ si ha

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f_y(0,0)y}{(x^2+y^2)^{1/2}}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{1-\cos(x^3)}{(x^2+y^2)^{3/2}}+2x^2+y-y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^3)}{(x^2+y^2)^2}+\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^{1/2}}\\&=\frac{1}{2}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^6}{(x^2+y^2)^2}+\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^{1/2}}\\&=\frac{1}{2}\lim_{\varrho\to0}\varrho^2\cos^6\vartheta+\lim_{\varrho\to0}2\varrho\cos^2\vartheta=0,\end{aligned}$$

perché $\varrho^2\to0$, $\cos^6\vartheta\leq1$, per il primo addendo, e $\varrho\to0$, $\cos^2\vartheta\leq1$, per il secondo. Quindi $f$ è differenziabile in $(0,0)$.
$(d)$ Poiché $f$ è differenziabile in $(0,0)$, il grafico di $f$ ha piano tangente $z=y$ nel punto $(0,0)$.

**Esercizio A2.** [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iiint_D \left(|x|e^{z^2} + y\sin x - x\sin y\right)\,dxdydz\,,$$

dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le z^2, 1 \le z \le 2\}$.

**Svolgimento:** Si ha

$$\begin{aligned}
\iiint_D (|x|e^{z^2} + y\sin x - x\sin y)\,dxdydz &\overset{(a)}{=} \iiint_D |x|e^{z^2}\,dxdydz \\
&= \int_1^2 e^{z^2}\left(\iint_{A_z} |x|\,dxdy\right)dz \overset{(b)}{=} \int_1^2 e^{z^2}\left(\iint_{A_{z\varrho\vartheta}} \varrho|\cos\vartheta|\,\varrho\,d\varrho d\vartheta\right)dz \\
&= 2\int_1^2 e^{z^2}\,\left[\sin\vartheta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{\varrho^3}{3}\right]_0^z dz = \frac{4}{3}\int_1^2 z^3 e^{z^2}\,dz \overset{(c)}{=} \frac{2}{3}\int_1^4 te^t\,dt \\
&= \frac{2}{3}\left[(t-1)e^t\right]_1^4 = 2e^4,
\end{aligned}$$

dove in $(a)$ si sono usate le simmetrie del dominio e della funzione integranda, in $(b)$ è usato il cambio di variabile $x = \varrho\cos\vartheta$, $y = \varrho\sin\vartheta$, per cui $A_{z\varrho\vartheta} = \{(\varrho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \varrho \in [0,z], \vartheta \in [0,2\pi]\}$, e in $(c)$ il cambio di variabile $z^2 = t \implies 2z\,dz = dt$.
Il dominio $D$ è riportato in figura 1.

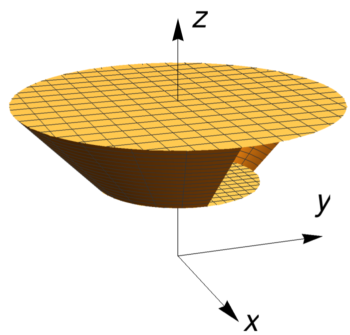


Figura 1: Il dominio $D$

**Esercizio A3.** [punti 6] Siano $S$ il grafico della funzione

$$z = x(x^2+2y^2), \qquad (x,y) \in D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\},$$

orientata dal versore normale $\vec{n}$ tale che $\vec{n}\cdot\vec{k} > 0$, e $\vec{F}$ il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = x^2y\,\vec{\imath} + x\,\vec{\jmath} + z^2\,\vec{k}$$

Calcolare la circuitazione [o lavoro] $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\gamma}$ di $\vec{F}$ lungo il bordo positivo della superficie $S$.

**Svolgimento:** $(3a)$ Usando il teorema di Stokes. Una parametrizzazione di $S$ è

$$\Phi(x,y) = (x,y,x^3+2xy^2), \qquad (x,y) \in \overline{A} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 1\},$$

il cui vettore normale è

$$\Phi_x \wedge \Phi_y = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 3x^2+2y^2 \\ 0 & 1 & 4xy \end{vmatrix} = -(3x^2+2y^2)\,\vec{\imath} - 4xy\,\vec{\jmath} + \vec{k},$$

che è equiverso a $\vec{n}$. Dal teorema di Stokes si ha

$$\int_{b^+S} \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} = \int_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_{\overline{A}} \operatorname{rot}\vec{F}\circ\Phi\cdot\Phi_x\wedge\Phi_y\,dxdy.$$

Poiché

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2y & x & z^2 \end{vmatrix} = (1-x^2)\vec{k},$$

si ha $\operatorname{rot}\vec{F}\circ\Phi\cdot\Phi_x\wedge\Phi_y = (1-x^2)\vec{k}\cdot\big(-(3x^2+2y^2)\,\vec{\imath} - 4xy\,\vec{\jmath} + \vec{k}\big) = 1-x^2$, per cui

$$\begin{aligned}\int_{b^+S} \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} &= \iint_{\overline{A}} (1-x^2)\,dxdy \overset{(a)}{=} \operatorname{area}(\overline{A}) - \int_0^{2\pi}\int_0^1 \varrho^2\cos^2\vartheta\,\varrho\,d\varrho d\vartheta \\ &= \pi - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2\vartheta)\,d\vartheta\Big[\frac{\varrho^4}{4}\Big]_0^1 = \pi - \frac{1}{8}\Big[\vartheta + \frac{1}{2}\sin 2\vartheta\Big]_0^{2\pi} = \frac{3\pi}{4},\end{aligned}$$

dove in $(a)$ si è usato il cambio di coordinate $x = \varrho\cos\vartheta$, $y = \varrho\sin\vartheta$.
Il dominio $D$ è riportato in figura 2.

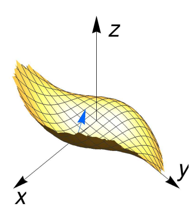


Figura 2: La superficie $S$

(3$b$) Usando la definizione. Poiché $bS = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 = 1, z = x(x^2+2y^2)\}$, una parametrizzazione di $b^+S$ è $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \cos t(\cos^2 t + 2\sin^2 t))$, $t\in[0,2\pi]$, e si ha

$$\begin{aligned}\int_{b^+S} \vec{F}\cdot d\vec{\gamma} &= \int_0^{2\pi}\big(\cos^2 t\sin t(-\sin t) + \cos t\cos t + \cos^2 t(2-\cos^2 t)^2(-\sin t)\big)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}\big(\cos^4 t - \sin t\cos^2 t(2-\cos^2 t)^2\big)\,dt \overset{(b)}{=} \int_0^{2\pi}\Big(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t\Big)\,dt = \frac{3\pi}{4},\end{aligned}$$

dove in $(b)$ si sono usati i risultati $\int_0^{2\pi}\sin t\cos^2 t(2-\cos^2 t)^2\,dt = -\int_0^0 s^2(2-s^2)^2\,ds = 0$, e $\cos^4 t = \frac{1}{4}(1+\cos 2t)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{4}\cos^2 2t = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{8}\cos 4t$.

**Esercizio A4.** [punti 6] Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{1}{nx}\, e^{-1/(n^2x^2)}\,, \quad x \in (0, +\infty), n \in \mathbb{N},$$

$(a)$ determinare l'insieme di convergenza puntuale e $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$,
$(b)$ determinare il generico intervallo di convergenza uniforme della successione.

**Svolgimento:** Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, e quindi la successione converge per ogni $x \in (0, +\infty)$. Poiché

$$f_n'(x) = \frac{2 - n^2x^2}{n^3x^4}\, e^{-1/(n^2x^2)} \geq 0 \iff x \in (0, \frac{\sqrt{2}}{n}),$$

si ha $\sup_{x\in(0,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = f_n(\frac{\sqrt{2}}{n}) = \frac{1}{\sqrt{2e}} \not\to 0$, per cui $f_n \not\rightrightarrows f$ in $(0, +\infty)$. Inoltre, per ogni $a > 0$, e $n > \frac{\sqrt{2}}{a}$, $f_n$ è decrescente in $[a, +\infty)$, per cui

$$\sup_{x\in[a,+\infty)} |f_n(x) - f(x)| = f_n(a) \to 0,$$

e quindi $f_n \rightrightarrows f$ in $[a, +\infty)$, per ogni $a > 0$.

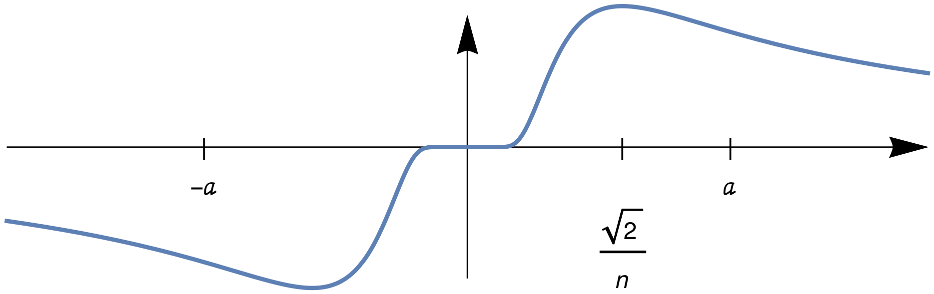


Figura 3: La funzione $f_n$

**Esercizio A5.** [punti 6] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Svolgimento:** Cerchiamo gli autovalori di $A$:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda)^2 = 0,$$

da cui si ottengono le soluzioni $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$ (doppia).
Autovettori per $\lambda_1 = 0$:

$$0 = A\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \iff v_1 = v_3 = 0,$$

e quindi scegliamo $\vec{v}_1 = \vec{e}_2$.
Autovettore per $\lambda_2 = 2$:

$$0 = (A - 2I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \iff v_3 = 0, v_1 + v_2 = 0.$$

Poiché c'è un solo autovettore indipendente, occorre cercare gli autovettori generalizzati:

$$0 = (A - 2I)^2\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \iff v_1 + v_2 = 0,$$

e quindi scegliamo $\vec{v}_3 = \vec{e}_3$, per cui $\vec{v}_2 = (A - 2I)\vec{v}_3 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.
Da $y_0 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$ si ricava

$$\begin{cases} 1 = y_1(0) = c_2 \\ 1 = y_2(0) = c_1 - c_2 \\ 1 = y_3(0) = c_3 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 1. \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi

$$\begin{aligned} y(t) = e^{At}y_0 &= c_1e^{At}\vec{v}_1 + c_2e^{At}\vec{v}_2 + c_3e^{At}\vec{v}_3 = c_1\vec{v}_1 + c_2e^{2t}\vec{v}_2 + c_3e^{2t}\big(I + (A-2I)t\big)\vec{v}_3 \\ &= c_1\vec{v}_1 + (c_2 + c_3t)e^{2t}\vec{v}_2 + c_3e^{2t}\vec{v}_3 = 2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1+t)e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (1+t)e^{2t} \\ y_2(t) &= 2 - (1+t)e^{2t} \\ y_3(t) &= e^{2t}. \end{aligned}$$

# Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (5/9/2024)

**Esercizio A1.** [punti 6] Data la seguente funzione

$$f(x, y) = x^2 y + 2x^2 + 8y^2 - y$$

determinare massimo e minimo di $f$ in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.

**Esercizio A2.** [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \left(2x^5 + \sqrt{\frac{4}{x^2 + y^2} - 1}\right) dxdy \ ,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.

**Esercizio A3.** [punti 6] Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^{y^2+z^2} + 2x^3 z)\,\vec{\imath} + x^3 z\,\vec{\jmath} - 3x^2 z^2\,\vec{k}$$

attraverso la superficie

$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, 1 \leq z \leq 2\right\}$$

orientata nel verso della normale esterna al cono.

**Esercizio A4.** [punti 6] Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(6^n + 1)} x^n (1 - x)^n \ , \quad x \in \mathbb{R},$$

$(a)$ determinare gli insiemi di convergenza puntuale (o semplice) e assoluta,
$(b)$ determinare il generico intervallo di convergenza uniforme della serie.

**Esercizio A5.** [punti 6] Data l'equazione differenziale

$$u'' = 2uu' \ ,$$

$(a)$ determinarne i punti di equilibrio, e tracciarne il diagramma di fase,
$(b)$ determinare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$.

# Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (5/9/2024)

**Esercizio A1.** [punti 6] Data la seguente funzione

$$f(x,y) = x^2y + 2x^2 + 8y^2 - y$$

determinare massimo e minimo di $f$ in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 1\}$.

**Svolgimento:** Poiché $D$ è chiuso e limitato e $f$ è continua su $D$, il teorema di Weierstrass ci assicura che $f$ ha massimo e minimo su $D$. Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:
($a$) tra i punti stazionari interni a $D$. Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x,y) \in D^o$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2xy + 4x = 2x(y+2) = 0 \\ f_y(x,y) = x^2 + 16y - 1 = 0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $A = (0, \frac{1}{16}) \in D^o$, e $(\pm\sqrt{33}, -2) \notin D^o$.
($b$) tra i punti interni a $D$ in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di $f$. In questo caso non ci sono.
($c$) tra i punti di frontiera di $D$. Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Per determinare il massimo e il minimo di $f$ sull'insieme $S = \{(x,y) \in D : x^2 + 4y^2 = 1\}$, usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e ci accontentiamo di trovare i punti stazionari della Lagrangiana [tra questi ci saranno anche i punti di massimo e minimo di $f|_S$].
Introduciamo la funzione di vincolo $g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 1$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y) = 2x = 0 \\ g_y(x,y) = 8y = 0 \\ g(x,y) = x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

che non ha soluzione.
Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) & = 2xy + 4x + 2x\lambda = 2x(y+2+\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) & = x^2 + 16y - 1 + 8y\lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) & = x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x = 0 \\ 16y - 1 + 8y\lambda = 0 \\ 4y^2 - 1 = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} y + 2 + \lambda = 0 \\ x^2 + 16y - 1 + 8y\lambda = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\frac{1}{2} \end{cases} \bigvee \begin{cases} 1 - 4y^2 + 16y - 1 - 8y(y+2) = 0 \\ x^2 + 4y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema fornisce i punti $P_\pm = (0, \pm\frac{1}{2})$. Il secondo fornisce i punti $Q_\pm = (\pm 1, 0)$.
($d$) Calcolando il valore di $f$ su tutti i punti trovati, otteniamo $f(0, \frac{1}{16}) = -\frac{1}{32}$, $f(0, \frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$, $f(0, -\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}$, $f(\pm 1, 0) = 2$. Quindi $\min_D f = -\frac{1}{32}$ e $\max_D f = \frac{5}{2}$.

**Esercizio A2.** [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \left(2x^5 + \sqrt{\frac{4}{x^2+y^2} - 1}\,\right) dxdy \ ,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4\}$.

**Svolgimento:** Si ha

$$\begin{aligned}
&\iint_D \left(2x^5 + \sqrt{\frac{4}{x^2+y^2} - 1}\,\right) dxdy \overset{(a)}{=} \lim_{a\to 0^+} \iint_{D^a} \sqrt{\frac{4}{x^2+y^2} - 1}\, dxdy \\
&\overset{(b)}{=} \lim_{a\to 0^+} \iint_{D^a_{\varrho,\vartheta}} \sqrt{\frac{4}{\varrho^2} - 1}\ \varrho\, d\varrho d\vartheta = \lim_{a\to 0^+} \iint_{D^a_{\varrho,\vartheta}} \sqrt{4-\varrho^2}\ d\varrho d\vartheta \\
&= \lim_{a\to 0^+} 2\pi \int_a^2 \sqrt{4-\varrho^2}\ d\varrho = 2\pi \int_0^2 \sqrt{4-\varrho^2}\ d\varrho \overset{(c)}{=} 2\pi \int_0^{\pi/2} 4\cos^2 t\, dt \\
&= 4\pi \int_0^{\pi/2} (1+\cos 2t)\, dt = 4\pi \left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\pi/2} = 2\pi^2,
\end{aligned}$$

dove in $(a)$ si sono usate le simmetrie e si è introdotto l'insieme $D^a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \le x^2 + y^2 \le 4\}$, in $(b)$ si è usato il cambio di variabile $x = \varrho\cos\vartheta$, $y = \varrho\sin\vartheta$, per cui

$$D^a_{\varrho\vartheta} = \{(\varrho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : a \le \varrho \le 2, \vartheta \in [0, 2\pi]\},$$

e in $(c)$ la sostituzione $\varrho = 2\sin t \implies d\varrho = 2\cos t\, dt$.

**Esercizio A3.** [punti 6] Calcolare il flusso del campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = (e^{y^2+z^2} + 2x^3 z)\,\vec{\imath} + x^3 z\,\vec{\jmath} - 3x^2 z^2\,\vec{k}$$

attraverso la superficie

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, 1 \le z \le 2\right\}$$

orientata nel verso della normale esterna al cono.

**Svolgimento:** Siano $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 1, z = 1\}$, $S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \le 4, z = 2\}$, per cui $\partial T = S \cup S_1 \cup S_2$. Una parametrizzazione di $S_1$ è $\Phi^1(x,y) = (x,y,1)$, $(x,y) \in A_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$, il cui vettore normale è $\Phi_x \wedge \Phi_y = \vec{k}$, che è interno a $T$. Una parametrizzazione di $S_2$ è $\Phi^2(x,y) = (x,y,2)$, $(x,y) \in A_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4\}$, il cui vettore normale è $\Phi_x \wedge \Phi_y = \vec{k}$, che è esterno a $T$. Dal teorema della divergenza si ha

$$\iiint_T \operatorname{div} \vec{F}\, dxdydz = \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}_e\, d\sigma + \int_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}_e\, d\sigma + \int_{S_2} \vec{F}\cdot\vec{n}_e\, d\sigma,$$

dove $\vec{n}_e$ è il versore normale esterno rispetto a $T$. Poiché $\operatorname{div} F = 6x^2z - 6x^2z = 0$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, d\sigma &= - \int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, d\sigma - \int_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, d\sigma \\
&= \iint_{A_1} \vec{F} \circ \Phi^1 \cdot \Phi^1_x \wedge \Phi^1_y \, dxdy - \iint_{A_2} \vec{F} \circ \Phi^2 \cdot \Phi^2_x \wedge \Phi^2_y \, dxdy \\
&= -3 \iint_{A_1} x^2 \, dxdy + 12 \iint_{A_2} x^2 \, dxdy \\
&\overset{(a)}{=} -3 \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \, d\vartheta \int_0^1 \varrho^3 \, d\varrho + 12 \int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \, d\vartheta \int_0^2 \varrho^3 \, d\varrho \\
&\overset{(b)}{=} -3\pi \left[ \frac{\varrho^4}{4} \right]_0^1 + 12\pi \left[ \frac{\varrho^4}{4} \right]_0^2 = -\frac{3}{4}\pi + 48\pi = \frac{189}{4}\pi,
\end{aligned}$$

dove in $(a)$ si è usato il cambio di coordinate $x = \varrho \cos\vartheta$, $y = \varrho \sin\vartheta$, e in $(b)$ il risultato $\int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\vartheta) \, d\vartheta = \pi$.

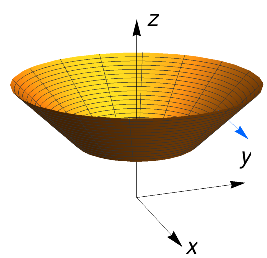


Figura 1: La superficie $S$

**Esercizio A4.** [punti 6] Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(6^n+1)} x^n (1-x)^n\,, \quad x \in \mathbb{R},$$

($a$) determinare gli insiemi di convergenza puntuale (o semplice) e assoluta,
($b$) determinare il generico intervallo di convergenza uniforme della serie.

**Svolgimento:** Posto $y = \varphi(x) = x(1-x)$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(6^n+1)}\, y^n$, che è una serie di potenze, il cui raggio di convergenza è dato da

$$\frac{1}{\varrho} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2(6^n+1)}} = \frac{1}{6} \lim_{n\to\infty} \exp\Big( -\frac{1}{n}\big(2\log n + \log(1+6^{-n})\big)\Big) = \frac{1}{6},$$

per cui la serie di potenze converge assolutamente per $y \in (-6,6)$, e non converge per $|y| > 6$. Per $y = 6$, la serie di potenze diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^2(6^n+1)}$, per cui il termine generico $a_n = \frac{1}{n^2}(1+o(1))$ e la serie converge (assolutamente). Per $y = -6$, la serie di potenze diventa $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{6^n}{n^2(6^n+1)}$, per cui il termine generico $|a_n| = \frac{1}{n^2}(1+o(1))$ e la serie converge assolutamente.
Infine, la serie di potenze converge uniformemente in $[-6,6]$, per il teorema di Abel di convergenza uniforme.
Poiché

$$-6 \le x - x^2 \le 6 \iff x \in [-2,3]\,,$$

la serie data converge assolutamente in $[-2,3]$, e non converge altrove. Inoltre, la serie data converge uniformemente in $[-2,3]$.

**Esercizio A5.** [punti 6] Data l'equazione differenziale

$$u'' = 2uu'\,,$$

($a$) determinarne i punti di equilibrio, e tracciarne il diagramma di fase,
($b$) determinare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$.

**Svolgimento:** ($a$) Trasformiamo l'equazione in un sistema, introducendo le coordinate del piano delle fasi $x := u$, $y := u'$, e ottenendo

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = 2xy. \end{cases}$$

I punti di equilibrio nel piano delle fasi sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x' = y = 0 \\ y' = 2xy = 0 \end{cases} \iff y = 0.$$

Le traiettorie di fase sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x) = 2x.$$

Integrando si ottengono le parabole

$$y = x^2 + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che $\mathbb{R}^2$ è unione disgiunta delle orbite

$\{(x,0)\}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$

$\big\{(x, x^2 + C) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\big\}, \quad \forall C > 0,$

$\big\{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 : x < 0\big\}, \quad C = 0,$

$\big\{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\big\}, \quad C = 0,$

$\big\{(x, x^2 + C) \in \mathbb{R}^2 : x < -\sqrt{-C}\big\}, \quad \forall C < 0,$

$\big\{(x, x^2 + C) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{-C} < x < \sqrt{-C}\big\}, \quad \forall C < 0,$

$\big\{(x, x^2 + C) \in \mathbb{R}^2 : x > \sqrt{-C}\big\}, \quad \forall C < 0.$

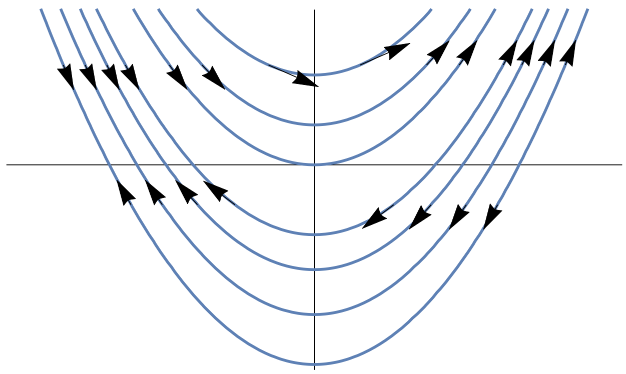

Figura 2: Diagramma di fase

Il diagramma di fase è riportato in figura 2, per alcuni valori di $C$.
$(b)$ Per determinare la soluzione del problema di Cauchy proposto, imponiamo la condizione iniziale $y(0) = 1$, ottenendo $C = 1$, per cui $y(x) = x^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ricordando che $(x, y) = (u, u')$, si ottiene l'equazione differenziale $u' = u^2 + 1$, che ha soluzione $t + c = \int \frac{du}{u^2+1} = \operatorname{arctg}(u) \iff u = \operatorname{tg}(t + c)$. Usando la condizione iniziale, si ha $0 = c$, per cui

$$u(t) = \operatorname{tg}(t), \qquad t \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\Big).$$

# Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (19/9/2024)

**Esercizio A1.** [punti 6] Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità di

$$f(x,y) = x\sqrt{\frac{x^2+y^2}{1+y^2}}\,.$$

Determinare l'eventuale equazione del piano tangente al grafico di $f$ in $(1,0)$.

**Esercizio A2.** [punti 6] Sia data la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{x\,dx + y\,dy}{1+x^2+y^2}\,.$$

($a$) Verificare se $\omega$ è chiusa e/o esatta nel suo dominio, e determinare eventualmente una funzione potenziale.
($b$) Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma(t) = \big(\log(1+\cos^2 t), \operatorname{tg}\frac{t}{2}\big)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

**Esercizio A3.** [punti 6] Dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{\imath} - x\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}\,,$$

calcolare il flusso $\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ attraverso la superficie

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 - y^2, x^2+y^2 \le 1, y \ge |x|\},$$

orientata dal versore normale $\vec{n}$ tale che $\vec{n}\cdot\vec{k} > 0$.

**Esercizio A4.** [punti 6] Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n+2}{n+x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

($a$) determinare l'insieme di convergenza puntuale e $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$,
($b$) determinare il generico intervallo di convergenza uniforme della successione.

**Esercizio A5.** [punti 6] Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = x/y \\ y' = xy \end{cases} \tag{E}$$

determinare gli eventuali punti di equilibrio, e tracciare il diagramma di fase. Determinare la traiettoria di fase e la soluzione di ($E$) che soddisfano $x(0) = 1$, $y(0) = -\frac{1}{2}$.

**Esercizio A1.** [punti 6] Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità di

$$f(x,y) = x\sqrt{\frac{x^2+y^2}{1+y^2}}\,.$$

Determinare l'eventuale equazione del piano tangente al grafico di $f$ in $(1,0)$.

**Svolgimento:** $(a)$ La continuità di $f$ in $\mathbb{R}^2$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue.
$(b)$ Calcoliamo le derivate parziali in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \sqrt{\frac{x^2+y^2}{1+y^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{(1+y^2)(x^2+y^2)}} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{(1+y^2)(x^2+y^2)}}\,, \\ f_y(x,y) &= \frac{x}{2}\sqrt{\frac{1+y^2}{x^2+y^2}}\,\frac{2y(1+y^2)-2y(x^2+y^2)}{(1+y^2)^2} = \frac{xy(1-x^2)}{\sqrt{(1+y^2)^3(x^2+y^2)}}\,. \end{aligned}$$

Quindi le derivate parziali sono anche continue in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Calcoliamole in $(0,0)$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{t|t|}{t} = 0 \\ f_y(0,0) &= \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0. \end{aligned}$$

$(c)$ Infine, $f$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, perché le derivate parziali sono continue in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. In $(0,0)$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x}{\sqrt{1+y^2}} = \lim_{\varrho\to 0}\frac{\varrho\cos\vartheta}{\sqrt{1+\varrho^2\sin^2\vartheta}} = 0,$$

perché $\varrho \to 0$, e $\frac{|\cos\vartheta|}{\sqrt{1+\varrho^2\sin^2\vartheta}} \le |\cos\vartheta| \le 1$. Quindi $f$ è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.
$(d)$ Poiché $f$ è differenziabile in $(1,0)$, il piano tangente al grafico di $f$ in $(1,0)$ ha equazione $z = f(1,0) + f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)y = 2x-1$.

**Esercizio A2.** [punti 6] Sia data la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \frac{x\,dx + y\,dy}{1+x^2+y^2}\,.$$

$(a)$ Verificare se $\omega$ è chiusa e/o esatta nel suo dominio, e determinare eventualmente una funzione potenziale.
$(b)$ Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma(t) = \big(\log(1+\cos^2 t), \operatorname{tg}\frac{t}{2}\big)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

**Svolgimento:** $(a)$ Posto $\omega(x,y) = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$, si ha $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2xy}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{\partial g}{\partial x}$, per cui $\omega$ è chiusa in $D := \mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso, e quindi $\omega$ è esatta in $D$. Una funzione potenziale $U$ deve soddisfare

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{x}{1+x^2+y^2} \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{1+x^2+y^2}. \end{cases}$$

Dalla prima equazione segue che $U(x,y) = \int \frac{x}{1+x^2+y^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(1+x^2+y^2) + \varphi(y)$, e derivando rispetto ad $y$, $\frac{y}{1+x^2+y^2} + \varphi'(y) = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{2+x^2+y^2} \iff \varphi'(y) = 0 \implies \varphi(y) = costante$, per cui una funzione potenziale è data da

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\log(1+x^2+y^2).$$

$(b)$ Allora $\int_\gamma \omega = U(\gamma(\frac{\pi}{2})) - U(\gamma(0)) = U(0,1) - U(\log 2, 0) = \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log\big(1 + (\log 2)^2\big)$.

**Esercizio A3.** [punti 6] Dato il campo vettoriale

$$\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{\imath} - x\,\vec{\jmath} + z\,\vec{k}\,,$$

calcolare il flusso $\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ attraverso la superficie

$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z = x^2-y^2, x^2+y^2 \le 1, y \ge |x|\},$$

orientata dal versore normale $\vec{n}$ tale che $\vec{n}\cdot\vec{k} > 0$.

**Svolgimento:** Una parametrizzazione di $S$ è

$$\Phi(x,y) = (x,y,x^2-y^2), \quad (x,y)\in\overline{A} := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 1, y\ge |x|\},$$

il cui vettore normale è

$$\Phi_x \wedge \Phi_y = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = -2x\,\vec{\imath} + 2y\,\vec{\jmath} + \vec{k},$$

che è equiverso a $\vec{n}$. Poiché $\vec{F}\circ\Phi\cdot\Phi_x\wedge\Phi_y = (y\,\vec{\imath} - x\,\vec{\jmath} + (x^2-y^2)\,\vec{k})\cdot(-2x\,\vec{\imath} + 2y\,\vec{\jmath} + \vec{k}) = x^2-y^2-4xy$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma &= \iint_{\overline{A}} \vec{F}\circ\Phi\cdot\Phi_x\wedge\Phi_y\,dxdy \overset{(a)}{=} \iint_{\overline{A}} (x^2-y^2)\,dxdy \\
&\overset{(b)}{=} \iint_{\overline{A}_{\varrho\vartheta}} \varrho^2(\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta)\,\varrho\,d\varrho d\vartheta = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \cos 2\vartheta\,d\vartheta \int_0^1 \varrho^3\,d\varrho \\
&= \left[\frac{1}{2}\sin 2\vartheta\right]_{\pi/4}^{3\pi/4} \left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}\,,
\end{aligned}$$

dove in $(a)$ si sono usate le simmetrie, e in $(b)$ il cambio di variabile $x = \varrho\cos\vartheta$, $y = \varrho\sin\vartheta$, per cui $\overline{A}_{\varrho\vartheta} = \{(\varrho,\vartheta)\in\mathbb{R}^2 : \varrho\in[0,1], \vartheta\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}]\}$.

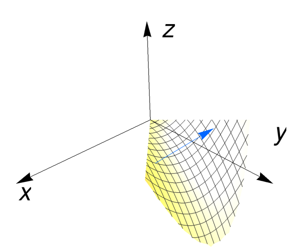


Figura 1: La superficie $S$

**Esercizio A4.** [punti 6] Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n+2}{n+x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

$(a)$ determinare l'insieme di convergenza puntuale e $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$,
$(b)$ determinare il generico intervallo di convergenza uniforme della successione.

**Svolgimento:** Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$, e quindi la successione converge per ogni $x \in \mathbb{R}$. Posto $g_n := f - f_n = \frac{x^2-2}{n+x^2}$, che è pari, poiché

$$g_n'(x) = \frac{2x(n+2)}{(n+x^2)^2} \geq 0 \iff x \geq 0,$$

si ha $\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \max\{|g_n(0)|, \lim_{x\to+\infty} |g_n(x)|\} = \max\{\frac{2}{n}, 1\} = 1 \not\to 0$, per cui $f_n \not\rightrightarrows f$ in $\mathbb{R}$. Inoltre, per ogni $a > \sqrt{2}$, $|f_n - f|$ è crescente in $[\sqrt{2}, a]$, per cui

$$\sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x) - f(x)| = \max\{\frac{2}{n}, 1 - f_n(a)\} \to 0,$$

e quindi $f_n \rightrightarrows f$ in $[-a, a]$, per ogni $a > 0$.

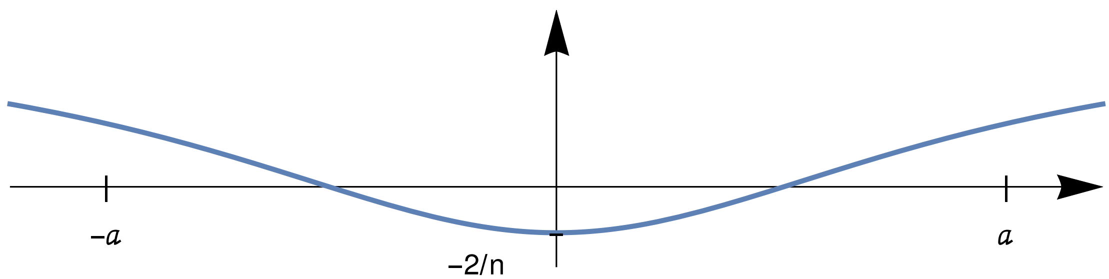


Figura 2: La funzione $g_n = f - f_n$

**Esercizio A5.** [punti 6] Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = x/y \\ y' = xy \end{cases} \tag{E}$$

determinare gli eventuali punti di equilibrio, e tracciare il diagramma di fase. Determinare la traiettoria di fase e la soluzione di $(E)$ che soddisfano $x(0) = 1$, $y(0) = -\frac{1}{2}$.

**Svolgimento:** I punti di equilibrio nel piano delle fasi sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{y} = 0 \\ y' = xy = 0 \end{cases} \iff x = 0.$$

Le altre traiettorie di fase sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} x \neq 0, y \neq 0 \\ y'(x) = y^2, \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} xy \neq 0 \\ x'(y) = \frac{1}{y^2}. \end{cases}$$

Integrando si ottiene $y = 0$, che non è ammissibile, e $\int \frac{dy}{y^2} = \int dx \iff -\frac{1}{y} = x + C$, cioè i grafici delle funzioni

$$y(x) = -\frac{1}{x+C}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$ è unione disgiunta delle orbite

$$\{(0,y)\}, \quad \forall y \in \mathbb{R},$$

$$\{(x, -\tfrac{1}{x+C}) : x < -C\}, \quad \forall C \in \mathbb{R},$$

$$\{(x, -\tfrac{1}{x+C}) : x > -C\}, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

Il diagramma di fase è riportato in figura 3.

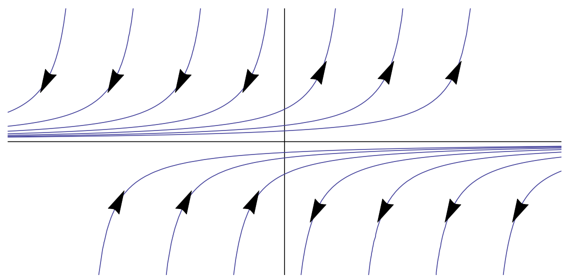

Figura 3: Diagramma di fase

Per determinare la traiettoria di fase richiesta, imponiamo la condizione iniziale $y(1) = -\frac{1}{2}$, e otteniamo $C = 1$, per cui $y(x) = -\frac{1}{x+1}$, $x > -1$.
Cerchiamo infine la soluzione di $(E)$ che soddisfa le condizioni iniziali. Deve essere $x' = \frac{x}{y(x)} = -x(x+1)$, per cui

$$t + c = \int dt = -\int \frac{dx}{x(x+1)} \overset{(a)}{=} \log\left|\frac{x+1}{x}\right|,$$

dove in $(a)$ si è usata la decomposizione $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$. Dalla condizione iniziale $x(0) = 1$ segue $c = \log 2$ e $\frac{x+1}{x} = 2e^t$, per cui

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{2e^t - 1}, & t > -\log 2, \\ y(t) = -\dfrac{1}{x(t)+1} = \dfrac{1}{2}e^{-t} - 1, & t > -\log 2. \end{cases}$$