Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (11/1/2023)

Esercizio A1. [punti 6] Data la seguente funzione

$$f(x,y) = x^2y + 3x^2 + y^2 + y$$

(a) determinarne i punti stazionari e la loro natura,
(b) determinare massimo e minimo di f in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \le y \le 4 - x^2\}$.

Esercizio A2. [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}\, dxdy\ ,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 4, x^2 + (y-1)^2 \ge 1\}$.

Esercizio A3. [punti 6] Calcolare $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}_e\, d\sigma$, dove S è la superficie laterale del cono

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 \ge x^2 + z^2, y \in [1,2]\},$$

orientata nel verso della normale esterna $\vec{n}_e$ a T, e

$$\vec{F}(x,y,z) = \Big(-2x + \frac{x^3}{3} + z^2 \Big)\, \vec{\imath} - (x^2y + z^2)\, \vec{\jmath} + 2z\, \vec{k}.$$

Esercizio A4. [punti 6] Data la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^{3x} + x^n)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 0),$$

(a) determinare l'insieme di convergenza puntuale,
(b) determinare l'insieme di convergenza assoluta.

Esercizio A5. [punti 6] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (11/1/2023)

Esercizio A1. [punti 6] Data la seguente funzione

$$f(x,y) = x^2y + 3x^2 + y^2 + y$$

(a) determinarne i punti stazionari e la loro natura,
(b) determinare massimo e minimo di f in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -4 \le y \le 4 - x^2\}$.

Svolgimento: (a) I punti stazionari sono soluzioni di

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x(y+3) = 0 \\ f_y(x,y) = x^2 + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

che fornisce i punti $P_1 = (0, -\frac{1}{2})$, $P_\pm = (\pm\sqrt{5}, -3)$. Poiché $f_{xx}(x,y) = 2y + 6$, $f_{xy}(x,y) = 2x$, $f_{yy}(x,y) = 2$, si ha

$$H_f(0, -\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_f(\pm\sqrt{5}, -3) = \begin{pmatrix} 0 & \pm 2\sqrt{5} \\ \pm 2\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix},$$

per cui P_1 è un punto di minimo, mentre $P_\pm$ sono di sella.
(b) Poiché D è chiuso e limitato e f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:
$(b1)$ tra i punti stazionari interni a D. In questo caso, $P_1 \in D^o$.
$(b2)$ tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f. In questo caso non ci sono.
$(b3)$ tra i punti di frontiera di D. Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Osserviamo che $\mathcal{F}D$ è costituita di un arco di parabola $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 4 - x^2, x \in (-\sqrt{8}, \sqrt{8})\}$, e un segmento di retta $S = \{(x,-3) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-\sqrt{8}, \sqrt{8}]\}$. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per studiare $f|_C$, e ci accontentiamo di trovare i punti stazionari della Lagrangiana [tra questi ci saranno anche i punti di massimo e minimo di $f|_C$].
Introduciamo la funzione di vincolo $g(x,y) = x^2 + y - 4$, $x \in (-\sqrt{8}, \sqrt{8})$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y) &= 2x = 0 \\ g_y(x,y) &= 1 = 0 \\ g(x,y) &= x^2 + y - 4 = 0,\ x \in (-\sqrt{8}, \sqrt{8}), \end{cases}$$

che non ha soluzione.
Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) &= 2x(y+3) + 2x\lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) &= x^2 + 2y + 1 + \lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + y - 4 = 0,\ x \in (-\sqrt{8}, \sqrt{8}), \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y - 4 = 0,\ x \in (-\sqrt{8}, \sqrt{8}), \end{cases} \quad \bigvee \begin{cases} \lambda = -y - 3 \\ x^2 + y - 2 = 0 \\ x^2 + y - 4 = 0,\ x \in (-\sqrt{8}, \sqrt{8}), \end{cases}$$

cioè il punto $P_2 = (0, 4)$.
Oppure, più rapidamente, consideriamo $k(x) := f(x, 4 - x^2) = x^2(4 - x^2) + 3x^2 + (4 - x^2)^2 + 4 - x^2 = 20 - 2x^2$, $x \in [-\sqrt{8}, \sqrt{8}]$, ed essendo $k'(x) = -4x$, segue dal teorema di Fermat che bisogna considerare i punti P_2, e $Q_\pm = (\pm\sqrt{8}, -4)$.
Per quanto riguarda $f|_S$, si ha $h(x) := f(x, -4) = 12 - x^2$, $x \in [-\sqrt{8}, \sqrt{8}]$, ed essendo $h'(x) = -2x$, segue dal teorema di Fermat, che bisogna considerare i punti $P_3 = (0, -4)$, e $Q_\pm$.
Il dominio D e i punti trovati sono riportati in figura 1.

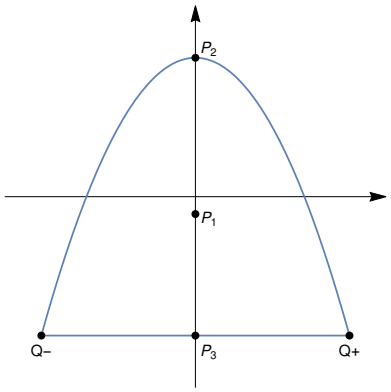

Figura 1: Il dominio D e i punti trovati

($b4$) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(Q_\pm) = 4$, $f(P_1) = -\frac{1}{4}$, $f(P_2) = 20$, $f(P_3) = 12$. Quindi $\min_D f = -\frac{1}{4}$ e $\max_D f = 20$.

Esercizio A2. [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\; dxdy\ ,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 4, x^2+(y-1)^2 \ge 1\}$.

Svolgimento: Si ha

$$\begin{aligned}
\iint_D \sqrt{4-x^2-y^2}\, dxdy &\overset{(a)}{=} \iint_{D_{\varrho,\vartheta}} \sqrt{4-\varrho^2}\,\varrho\, d\varrho d\vartheta \\
&= \int_0^{\pi}\left(\int_{2\sin\vartheta}^{2} \varrho\sqrt{4-\varrho^2}\, d\varrho\right) d\vartheta + \int_{\pi}^{2\pi}\left(\int_0^{2} \varrho\sqrt{4-\varrho^2}\, d\varrho\right) d\vartheta \\
&\overset{(b)}{=} \int_0^{\pi}\Big[-\frac{1}{3}(4-\varrho^2)^{3/2}\Big]_{2\sin\vartheta}^{2} d\vartheta + \int_{\pi}^{2\pi}\Big[-\frac{1}{3}(4-\varrho^2)^{3/2}\Big]_0^{2} d\vartheta \\
&= \frac{8}{3}\int_0^{\pi} |\cos\vartheta|^3\, d\vartheta + \frac{8}{3}\int_{\pi}^{2\pi} d\vartheta \overset{(c)}{=} \frac{16}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^3\vartheta\, d\vartheta + \frac{8}{3}\pi \\
&\overset{(d)}{=} \frac{16}{3}\int_0^1 (1-z^2)\, dz + \frac{8}{3}\pi = \frac{16}{3}\Big[z - \frac{z^3}{3}\Big]_0^1 + \frac{8}{3}\pi = \frac{32}{9} + \frac{8}{3}\pi,
\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambio di variabile $x = \varrho\cos\vartheta$, $y = \varrho\sin\vartheta$, per cui

$$D_{\varrho\vartheta} = \{(\varrho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 2\sin\vartheta \le \varrho \le 2, \vartheta \in [0,\pi]\} \cup \{(\varrho,\vartheta) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \varrho \le 2, \vartheta \in [\pi, 2\pi]\},$$

in (b) il risultato $\int \varrho\sqrt{4-\varrho^2}\, d\varrho = -\frac{1}{2}\int \sqrt{t}\, dt = -\frac{1}{3}t^{3/2} = -\frac{1}{3}(4-\varrho^2)^{3/2}$, in (c) le simmetrie della funzione integranda, e in (d) la sostituzione $\sin\vartheta = z \implies \cos\vartheta\, d\vartheta = dz$.
Il dominio D è riportato in figura 2.

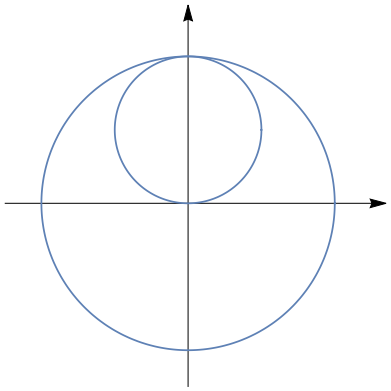

Figura 2: Il dominio d'integrazione D

Esercizio A3. [punti 6] Calcolare $\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}_e\,d\sigma$, dove S è la superficie laterale del cono

$$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y^2\geq x^2+z^2, y\in[1,2]\},$$

orientata nel verso della normale esterna $\vec{n}_e$ a T, e

$$\vec{F}(x,y,z)=\Big(-2x+\frac{x^3}{3}+z^2\Big)\,\vec{\imath}-(x^2y+z^2)\,\vec{\jmath}+2z\,\vec{k}.$$

Svolgimento: Siano $S_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+z^2\leq 1, y=1\}$, $S_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+z^2\leq 4, y=2\}$, per cui $\partial T = S\cup S_1\cup S_2$. Una parametrizzazione di S_1 è $\Phi^1(x,z)=(x,1,z)$, $(x,z)\in A_1:=\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 : x^2+z^2\leq 1\}$, il cui vettore normale è $\Phi^1_x\wedge\Phi^1_z=\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\1&0&0\\0&0&1\end{vmatrix}=-\vec{\jmath}$, che è esterno a T, mentre una parametrizzazione di S_2 è $\Phi^2(x,z)=(x,2,z)$, $(x,z)\in A_2:=\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 : x^2+z^2\leq 4\}$, il cui vettore normale è $\Phi^2_x\wedge\Phi^2_z=-\vec{\jmath}$, che è interno a T.
Le superfici S, S_1, S_2, e le loro normali esterne, sono riportate in figura 3.

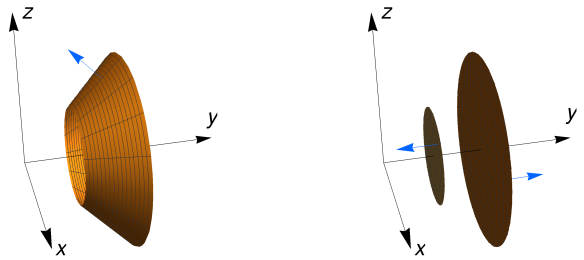

Figura 3: Le superfici S, a sinistra, e S_1, S_2, a destra

Dal teorema della divergenza si ha

$$\iiint_T \operatorname{div}\vec{F}\,dxdydz=\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}_e\,d\sigma+\int_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}_e\,d\sigma+\int_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}_e\,d\sigma,$$

dove $\vec{n}_e$ è il versore normale esterno rispetto a T. Poiché $\operatorname{div}F=-2+x^2-x^2+2=0$, si ha

$$\begin{aligned}\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}_e\,d\sigma &= -\int_{S_1}\vec{F}\cdot\vec{n}_e\,d\sigma-\int_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{n}_e\,d\sigma\\ &= -\iint_{A_1}\vec{F}\circ\Phi^1\cdot\Phi^1_x\wedge\Phi^1_z\,dxdz+\iint_{A_2}\vec{F}\circ\Phi^2\cdot\Phi^2_x\wedge\Phi^2_z\,dxdz\\ &= -\iint_{A_1}(x^2+z^2)\,dxdz+\iint_{A_2}(2x^2+z^2)\,dxdz\\ &\overset{(a)}{=} -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \varrho^2\,\varrho\,d\varrho d\vartheta+\int_0^{2\pi}\int_0^2\varrho^2(1+\cos^2\vartheta)\,\varrho\,d\varrho d\vartheta\\ &\overset{(b)}{=} -2\pi\Big[\frac{\varrho^4}{4}\Big]_0^1+\Big[\frac{\varrho^4}{4}\Big]_0^2\cdot\Big[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\vartheta)\Big]_0^{2\pi}=-\frac{\pi}{2}+12\pi=\frac{23}{2}\pi,\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambio di coordinate $x=\varrho\cos\vartheta$, $z=\varrho\sin\vartheta$, e in (b) l'identità trigonometrica $\cos^2\vartheta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\vartheta)$.

Esercizio A4. [punti 6] Data la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^{3x}+x^n)}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus (-1,0),$$

(a) determinare l'insieme di convergenza puntuale,
(b) determinare l'insieme di convergenza assoluta.

Svolgimento: Sia $a_n := \frac{1}{n^2(n^{3x}+x^n)}$.
Per $x \in [0,1)$ si ha $a_n = \frac{1}{n^{3x+2}}(1+o(1))$ e la serie converge (assolutamente).
Per $x = -1$ si ha $a_n = \frac{1}{n^2(\frac{1}{n^3}+(-1)^n)}$, e poiché $|\frac{1}{n^3}+(-1)^n| \geq \frac{1}{2}$, $\forall n \geq 2$, si ha $|a_n| \leq \frac{2}{n^2}$, e la serie converge assolutamente.
Per $x = 1$ si ha $a_n = \frac{1}{n^2(n^3+1)}$ e la serie converge (assolutamente).
Per $|x| > 1$ si ha $a_n = \frac{1}{n^2 x^n}(1+o(1)) = o(\frac{1}{n^2})$, e la serie converge assolutamente.
Quindi la serie converge assolutamente in $(-\infty,-1] \cup [0,+\infty)$.

Esercizio A5. [punti 6] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento: Cerchiamo gli autovalori di A:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1+\lambda)(3-\lambda) + 4 - (1+\lambda) - (3-\lambda) - 4\lambda$$
$$= -\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = -\lambda(\lambda-1)^2 = 0,$$

da cui si ottengono le soluzioni $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$ (doppia).
Autovettore per $\lambda_1 = 0$:

$$0 = A\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \wedge x_1 - x_2 = 0 \iff x_1 = x_2 = x_3,$$

e possiamo scegliere $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Autovettori per $\lambda_2 = 1$:

$$0 = (A-I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \wedge x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$\iff x_1 = x_2 \wedge x_3 = 0,$$

cioè i detti autovettori sono tutti proporzionali a $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Poiché c'è un solo autovettore indipendente, occorre cercare un autovettore generalizzato:

$$0 = (A-I)^2\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff x_1 - x_2 - x_3 = 0,$$

e quindi scegliamo $\vec{v}_2 = \vec{e}_1 + \vec{v}_3 \in \ker(A-I)^2 \setminus \ker(A-I)$, e $\vec{v}_3 = (A-I)\vec{v}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$. Da $y_0 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$ si ricava

$$\begin{cases} 0 = y_1(0) = c_1 + c_2 + c_3 \\ 1 = y_2(0) = c_1 + c_3 \\ 2 = y_3(0) = c_1 + c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = -2. \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi:

$$\begin{aligned} y(t) = e^{At}y_0 &= c_1e^{At}\vec{v}_1 + c_2e^{At}\vec{v}_2 + c_3e^{At}\vec{v}_3 = c_1\vec{v}_1 + c_2e^t\big(I + (A-I)t\big)\vec{v}_2 + c_3e^t\vec{v}_3 \\ &= c_1\vec{v}_1 + c_2e^t\vec{v}_2 + (c_3 + c_2t)e^t\vec{v}_3 = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - (2+t)e^t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} y_1(t) &= 3 - (3+t)e^t \\ y_2(t) &= 3 - (2+t)e^t \\ y_3(t) &= 3 - e^t. \end{aligned}$$

Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (3/2/2023)

Esercizio A1. [punti 6] Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità di

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right) + x - 3y^2 & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Determinare l'eventuale equazione del piano tangente al grafico nel punto $(0,0)$.

Esercizio A2. [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iiint_D (x+z^2)\; dxdydz$$

dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2+y^2+z^2 \leq 4, x \leq 0\}$.

Esercizio A3. [punti 6] Sia data la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \left(\frac{x}{2+x^2+y^2} + 4x^3\right) dx + \left(\frac{y}{2+x^2+y^2} - 6y^5\right) dy.$$

(a) Verificare che ω è esatta in $D = \mathbb{R}^2$, e determinarne una primitiva (o potenziale).
(b) Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma(t) = \big(2t + t\cos(\pi t), t + t\sin(\pi t)\big)$, $t \in [0,1]$.

Esercizio A4. [punti 6] Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-2)^n}{n}\,,$$

(a) determinare gli insiemi di convergenza puntuale (o semplice) e assoluta,
(b) determinare il generico insieme di convergenza uniforme della serie.

Esercizio A5. [punti 6] Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = y^{5/3} \end{cases} \tag{E}$$

determinare gli eventuali punti di equilibrio, e tracciare il diagramma di fase. Determinare la traiettoria di fase e la soluzione di (E) che soddisfano $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (3/2/2023)

Esercizio A1. [punti 6] Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità di

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)+x-3y^2 & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\,.\end{cases}$$

Determinare l'eventuale equazione del piano tangente al grafico nel punto $(0,0)$.

Svolgimento: La continuità di f in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. In $(0,0)$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}+x-3y^2=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=\lim_{\varrho\to0}\varrho^2\sin\frac{1}{\varrho^2}=0,$$

perché $\varrho^2\to0$ e $|\sin\frac{1}{\varrho^2}|\le1$. Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$.
Calcoliamo le derivate parziali in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Si ha

$$\begin{aligned}f_x(x,y)&=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+(x^2+y^2)\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}+1\\&=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}+1\\f_y(x,y)&=2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}-6y.\end{aligned}$$

Quindi le derivate parziali sono anche continue in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Calcoliamole in $(0,0)$. Si ha

$$\begin{aligned}f_x(0,0)&=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}t\sin\frac{1}{t^2}+1=1\\f_y(0,0)&=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}t\sin\frac{1}{t^2}-3t=0.\end{aligned}$$

Infine, f è differenziabile in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, perché le derivate parziali sono continue in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. In $(0,0)$ si ha

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f_x(0,0)x}{(x^2+y^2)^{1/2}}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}+x-3y^2-x}{(x^2+y^2)^{1/2}}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)^{1/2}\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{3y^2}{(x^2+y^2)^{1/2}}\\&=\lim_{\varrho\to0}\left(\varrho\sin\frac{1}{\varrho^2}-3\varrho\sin^2\vartheta\right)=0,\end{aligned}$$

perché $\varrho\to0$ e $|\sin\frac{1}{\varrho^2}|\le1$, $\sin^2\vartheta\le1$. Quindi f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.
Il piano tangente al grafico di f in $(0,0)$ ha equazione $z=f(0,0)+f_x(0,0)x+f_y(0,0)y=x$.

Esercizio A2. [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iiint_D (x+z^2)\,dxdydz$$

dove $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\le x^2+y^2+z^2\le 4, x\le 0\}$.

Svolgimento: Si ha

$$\begin{aligned}\iiint_D (x+z^2)\,dxdydz &\overset{(a)}{=} \iiint_{D_{\varrho\vartheta\varphi}} (\varrho\cos\vartheta\sin\varphi+\varrho^2\cos^2\varphi)\,\varrho^2\sin\varphi\,d\varrho d\vartheta d\varphi\\ &= \int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos\vartheta\,d\vartheta\int_1^2\varrho^3\,d\varrho+\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi\int_{\pi/2}^{3\pi/2}d\vartheta\int_1^2\varrho^4\,d\varrho\\ &\overset{(b)}{=} -\frac{\pi}{2}\cdot 2\cdot\frac{15}{4}+\frac{2}{3}\cdot\pi\cdot\frac{31}{5}=\frac{23}{60}\pi,\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambio di variabile $x=\varrho\cos\vartheta\sin\varphi$, $y=\varrho\sin\vartheta\sin\varphi$, $z=\varrho\cos\varphi$, per cui $D_{\varrho\vartheta\varphi}=\{(\varrho,\vartheta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 : 1\le\varrho\le 2,\vartheta\in[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}],\varphi\in[0,\pi]\}$, e in (b) i risultati $\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi=\frac{\pi}{2}$, $\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos\vartheta\,d\vartheta=\big[\sin\vartheta\big]_{\pi/2}^{3\pi/2}=-2$, $\int_1^2\varrho^3\,d\varrho=\big[\frac{1}{4}\varrho^4\big]_1^2=\frac{15}{4}$, $\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\sin\varphi\,d\varphi=-\int_0^{\pi}\cos^2\varphi\,d(\cos\varphi)=\int_{-1}^1 t^2\,dt=2\big[\frac{1}{3}t^3\big]_0^1=\frac{2}{3}$, e $\int_1^2\varrho^4\,d\varrho=\big[\frac{1}{5}\varrho^5\big]_1^2=\frac{31}{5}$.

Esercizio A3. [punti 6] Sia data la forma differenziale

$$\omega(x,y)=\Big(\frac{x}{2+x^2+y^2}+4x^3\Big)\,dx+\Big(\frac{y}{2+x^2+y^2}-6y^5\Big)\,dy.$$

(a) Verificare che ω è esatta in $D=\mathbb{R}^2$, e determinarne una primitiva (o potenziale).
(b) Calcolare $\int_\gamma\omega$, dove $\gamma(t)=\big(2t+t\cos(\pi t),t+t\sin(\pi t)\big)$, $t\in[0,1]$.

Svolgimento: Posto $\omega(x,y)=f\,dx+g\,dy$, si ha $\frac{\partial g}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=-\frac{2xy}{(2+x^2+y^2)^2}$, per cui ω è chiusa in D, che è semplicemente connesso, e quindi ω è esatta in D. Una funzione potenziale U deve soddisfare

$$\begin{cases}\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{x}{2+x^2+y^2}+4x^3\\ \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{y}{2+x^2+y^2}-6y^5.\end{cases}$$

Dalla prima equazione segue che $U(x,y)=\int\big(\frac{x}{2+x^2+y^2}+4x^3\big)\,dx=\frac{1}{2}\log(2+x^2+y^2)+x^4+\varphi(y)$, e derivando rispetto ad y, $\frac{y}{2+x^2+y^2}+\varphi'(y)=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{y}{2+x^2+y^2}-6y^5 \iff \varphi'(y)=-6y^5 \implies \varphi(y)=-y^6$, per cui una funzione potenziale è data da

$$U(x,y)=\frac{1}{2}\log(2+x^2+y^2)+x^4-y^6.$$

Allora $\int_\gamma\omega=U(\gamma(1))-U(\gamma(0))=U(1,1)-U(0,0)=\frac{1}{2}\log 2$.

Esercizio A4. [punti 6] Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^2-2)^n}{n},$$

(a) determinare gli insiemi di convergenza puntuale (o semplice) e assoluta,
(b) determinare il generico insieme di convergenza uniforme della serie.

Svolgimento: Posto $y = \varphi(x) = x^2 - 2$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n}$, che è una serie di potenze, il cui raggio di convergenza è $\frac{1}{\varrho} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$. Per $y = 1$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, che non converge. Per $y = -1$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, che converge (non assolutamente), per Leibniz. Quindi, la serie di potenze converge assolutamente per ogni $y \in (-1, 1)$, semplicemente per ogni $y \in [-1, 1)$, e uniformemente in $[-1, 1-\delta]$, $\forall \delta > 0$.
Poiché $-1 \le x^2 - 2 < 1 \iff x \in (-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3})$, la serie data converge semplicemente in $(-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3})$, converge assolutamente in $(-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$, e uniformemente in $[-\sqrt{3}+\delta, -1] \cup [1, \sqrt{3}-\delta]$, per ogni $\delta > 0$.

Esercizio A5. [punti 6] Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = y^{5/3} \end{cases} \tag{E}$$

determinare gli eventuali punti di equilibrio, e tracciare il diagramma di fase. Determinare la traiettoria di fase e la soluzione di (E) che soddisfano $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

Svolgimento: I punti di equilibrio nel piano delle fasi sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x' = y = 0 \\ y' = y^{5/3} = 0 \end{cases} \iff y = 0.$$

Le traiettorie di fase sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} y \neq 0 \\ y'(x) = \frac{y^{5/3}}{y} = y^{2/3} \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} y \neq 0 \\ x'(y) = \frac{1}{y^{2/3}}. \end{cases}$$

Integrando la prima equazione si ottiene $y = 0$, che non è ammissibile, e

$$x + c = \int dx = \int y^{-2/3}\, dy = 3y^{1/3} \iff y(x) = \Big(\frac{x+c}{3}\Big)^3, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che $\mathbb{R}^2$ è unione disgiunta delle orbite

$\{(x, 0)\}$, $\quad \forall x \in \mathbb{R}$,

$\big\{\big(x, \frac{(x+c)^3}{27}\big) : x < -c\big\}$, $\quad \forall c \in \mathbb{R}$,

$\big\{\big(x, \frac{(x+c)^3}{27}\big) : x > -c\big\}$, $\quad \forall c \in \mathbb{R}$.

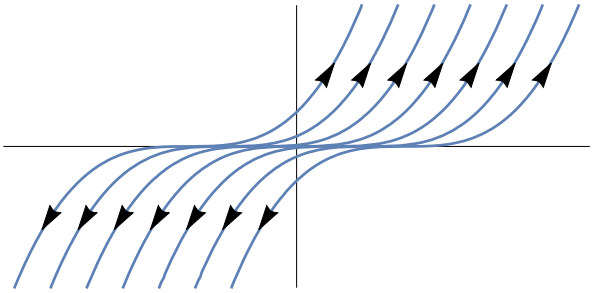

Figura 1: Diagramma di fase

Il diagramma di fase è riportato in figura 1.
Per determinare la traiettoria di fase richiesta, imponiamo il passaggio per $(x_0, y_0) = (1, 1)$, cioè $c = 2$, ottenendo $y(x) = \left(\frac{x+2}{3}\right)^3$, $x \in \mathbb{R}$.
Cerchiamo infine la soluzione di (E) che soddisfa le condizioni iniziali. Deve essere

$$x' = y(x) = \left(\frac{x+2}{3}\right)^3, \qquad x \in \mathbb{R},$$

per cui $t + c = \int \frac{27\,dx}{(x+2)^3} = -\frac{27}{2(x+2)^2}$, e dalla condizione iniziale $x(0) = 1$ segue $c = -\frac{3}{2}$, per cui

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3-2t}} - 2, & t < \frac{3}{2}, \\ y(t) = \dfrac{3\sqrt{3}}{(3-2t)^{3/2}}, & t < \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (8/6/2023)

Esercizio A1. [punti 6] Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali, differenziabilità di

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y + 3xy^3}{2x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Esercizio A2. [punti 6] Sia data la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \Big(\frac{y^2}{2+x} - \frac{y}{x^2+y^2}\Big)\,dx + \Big(2y\log(2+x) + \frac{x}{x^2+y^2}\Big)\,dy.$$

(*a*) Verificare se ω è chiusa/esatta in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > -2\} \setminus \{(0,0)\}$.
(*b*) Calcolare $\int_{\partial^+ Q} \omega$, dove $Q = [-1,2] \times [-2,1]$.

Esercizio A3. [punti 6] Siano S la superficie contenuta nel piano $z = x - 1$ e limitata dal cono ellittico $z^2 = 2x^2 + y^2$.
(*a*) Determinare una parametrizzazione regolare di S.
(*b*) Calcolare

$$\int_S \frac{1}{2x^2 + y^2 - z^2 + 3}\,d\sigma.$$

Esercizio A4. [punti 6] Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2x^2}{2 + n^2x^2}\,,$$

(*a*) determinare l'insieme di convergenza puntuale e $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$,
(*b*) determinare il generico intervallo di convergenza uniforme della successione.

Esercizio A5. [punti 6] Data l'equazione differenziale

$$(2 + u^2)u'' - 2u(u')^2 = 0\,,$$

(*a*) determinarne i punti di equilibrio, e tracciarne il diagramma di fase,
(*b*) determinare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$.

Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (8/6/2023)

Esercizio A1. [punti 6] Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali, differenziabilità di

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y+3xy^3}{2x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Svolgimento: La continuità di f in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. In $(0,0)$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y+3xy^3}{2x^2+y^2}=\lim_{(z,y)\to(0,0)}\frac{\frac{1}{2}z^2y+\frac{3}{\sqrt{2}}zy^3}{z^2+y^2}=\lim_{\varrho\to0}\varrho\Big(\frac{1}{2}\cos^2\vartheta\sin\vartheta+\frac{3}{\sqrt{2}}\varrho\cos\vartheta\sin^2\vartheta\Big)=0,$$

perché $\varrho\to0$, e $\big|\frac{1}{2}\cos^2\vartheta\sin\vartheta+\frac{3}{\sqrt{2}}\varrho\cos\vartheta\sin^2\vartheta\big|\le\frac{1}{2}+\frac{3}{\sqrt{2}}$. Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$. Calcoliamo le derivate parziali in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Si ha

$$f_x(x,y)=\frac{y^3(3y^2+2x-6x^2)}{(2x^2+y^2)^2},$$
$$f_y(x,y)=\frac{x(3y^4+18x^2y^2-xy^2+2x^3)}{(2x^2+y^2)^2}.$$

Quindi le derivate parziali sono continue in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, per teoremi generali sulle funzioni continue. Calcoliamole in $(0,0)$. Si ha

$$f_x(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0,$$
$$f_y(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0.$$

Infine, f è differenziabile in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, perché ivi f è di classe C^1. Verifichiamo se f è differenziabile in $(0,0)$. Si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y+3xy^3}{(2x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=\nexists,$$

perché

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{x^2y+3xy^3}{(2x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{x\to0}\frac{x^3+3x^4}{3\sqrt{2}x^2|x|}=\frac{1}{3\sqrt{2}}\lim_{x\to0}(\operatorname{sgn}x+|x|)=\nexists.$$

Quindi f non è differenziabile in $(0,0)$.

Esercizio A2. [punti 6] Sia data la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \Big(\frac{y^2}{2+x} - \frac{y}{x^2+y^2}\Big)\,dx + \Big(2y\log(2+x) + \frac{x}{x^2+y^2}\Big)\,dy.$$

(*a*) Verificare se ω è chiusa/esatta in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > -2\} \setminus \{(0,0)\}$.
(*b*) Calcolare $\int_{\partial^+ Q} \omega$, dove $Q = [-1,2] \times [-2,1]$.

Svolgimento: Indichiamo con $\omega = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$ la forma differenziale da integrare. Poiché $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{2+x} + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial g}{\partial x}$, ω è chiusa in D, che non è semplicemente connesso. Osserviamo, però, che $\omega = \omega_1 + \omega_2$ è la somma di una forma esatta $\omega_1 = \frac{y^2}{2+x}\,dx + 2y\log(2+x)\,dy$ [perché chiusa in $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > -2\}$, che è semplicemente connesso], e di una forma chiusa non necessariamente esatta $\omega_2 = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$. Usando l'invarianza omotopica dell'integrale di una forma chiusa, possiamo introdurre la curva $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, e ottenere

$$\int_{\partial^+ Q} \omega = \int_{\partial^+ Q} \omega_1 + \int_{\partial^+ Q} \omega_2 = \int_{\partial^+ Q} \omega_2 = \int_\gamma \omega_2 = \int_0^{2\pi} \big(\sin^2 t + \cos^2 t\big)\,dt = 2\pi.$$

Esercizio A3. [punti 6] Siano S la superficie contenuta nel piano $z = x - 1$ e limitata dal cono ellittico $z^2 = 2x^2 + y^2$.
(*a*) Determinare una parametrizzazione regolare di S.
(*b*) Calcolare

$$\int_S \frac{1}{2x^2 + y^2 - z^2 + 3}\,d\sigma.$$

Svolgimento: (*a*) La superficie S è descritta dal grafico della funzione $z = x - 1$, definita sul dominio piano $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \le (x-1)^2\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \le 2\}$ [che si ottiene proiettando sul piano $z = 0$ l'insieme $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + y^2 \le z^2, z = x - 1\}$]. Quindi, una parametrizzazione regolare di S è data da $\Phi(x,y) = (x, y, x-1)$, $(x,y) \in D$, il cui vettore normale è $\Phi_x \wedge \Phi_y = -\vec{\imath} + \vec{k}$.
(*b*) Si ha

$$\begin{aligned}\int_S \frac{1}{2x^2 + y^2 - z^2 + 3}\,d\sigma &= \iint_D \frac{\|\Phi_x \wedge \Phi_y\|}{2x^2 + y^2 - (x-1)^2 + 3}\,dx\,dy = \sqrt{2}\iint_D \frac{dx\,dy}{(x+1)^2 + y^2 + 1} \\ &\overset{(\alpha)}{=} \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{\varrho\,d\varrho\,d\vartheta}{\varrho^2+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\pi\big[\log(\varrho^2+1)\big]_0^{\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}\,\log 3,\end{aligned}$$

dove in (α) si è usato il cambiamento di coordinate $x = -1 + \varrho\cos\vartheta$, $y = \varrho\sin\vartheta$.

Esercizio A4. [punti 6] Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2x^2}{2+n^2x^2}\,,$$

(a) determinare l'insieme di convergenza puntuale e $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$,
(b) determinare il generico intervallo di convergenza uniforme della successione.

Svolgimento: Osserviamo che $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \neq 0, \end{cases}$ e quindi la successione converge per ogni $x \in \mathbb{R}$. Poiché $f \notin C^0(\mathbb{R})$, $f_n \not\rightrightarrows f$ in $\mathbb{R}$. Inoltre, per ogni $a > 0$, $|f_n(x)-f(x)| = 1-\frac{n^2x^2}{2+n^2x^2} = \frac{2}{2+n^2x^2}$ è pari, e decrescente in $[a,+\infty)$, per cui $\sup_{|x|\geq a} |f_n(x)-f(x)| = \frac{2}{2+n^2a^2} \to 0$, e quindi $f_n \rightrightarrows f$ in $(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$, per ogni $a > 0$.

Esercizio A5. [punti 6] Data l'equazione differenziale

$$(2+u^2)u'' - 2u(u')^2 = 0\,,$$

(a) determinarne i punti di equilibrio, e tracciarne il diagramma di fase,
(b) determinare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$.

Svolgimento: (a) Trasformiamo l'equazione in un sistema, introducendo le coordinate del piano delle fasi $x := u$, $y := u'$, e ottenendo

$$\begin{cases} x' = u' = y \\ y' = u'' = \frac{2u(u')^2}{u^2+2} = \frac{2xy^2}{x^2+2}. \end{cases}$$

I punti di equilibrio nel piano delle fasi sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x' = y = 0 \\ y' = \frac{2xy^2}{x^2+2} = 0 \end{cases} \iff y = 0.$$

Le traiettorie di fase sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{2xy(x)}{x^2+2}.$$

Integrando si ottiene $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x\,dx}{x^2+2} \iff \log|y| = \log(x^2+2) + k \iff y = C(x^2+2)$, cioè le famiglie di grafici $y(x) = C(x^2+2)$, $C \in \mathbb{R}$. Il diagramma di fase è riportato in figura 1, per $C \in \{-4,-3,\dots,4\}$.
(b) Per determinare la soluzione del problema di Cauchy proposto, imponiamo la condizione iniziale $y(0) = 1$, ottenendo $C = \frac{1}{2}$, per cui $y(x) = \frac{1}{2}(x^2+2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Ricordando che $(x,y) = (u,u')$, si ottiene l'equazione differenziale $u' = \frac{1}{2}(u^2+2)$, e bisogna risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{2}(u^2+2) \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

La soluzione è $t + c = \int dt = 2\int \frac{du}{2+u^2} = \sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{u}{\sqrt{2}} \iff u = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(t+c)\right)$, e imponendo la condizione iniziale si ha $c = 0$, per cui $u(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{tg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,t\right)$, $t \in \left(-\frac{\pi}{\sqrt{2}}, \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$.

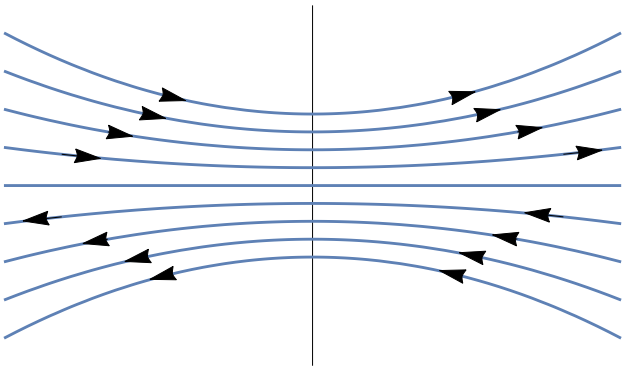

Figura 1: Diagramma di fase per l'equazione differenziale

Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (11/7/2023)

Esercizio A1. [punti 6] Data la seguente funzione

$$f(x,y) = x^3 - y^3$$

(a) determinarne i punti stazionari e la loro natura,
(b) determinare massimo e minimo di f in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio A2. [punti 6] Siano $T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4}x^2 + y^2 \leq 1\}$, e ω la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \left(x^2 y + \frac{x}{x^2+y^2}\right) dx + \left(x^3 + \frac{y}{x^2+y^2}\right) dy.$$

(a) Dire se ω è chiusa e/o esatta in $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(b) Calcolare $\int_{\partial^+ T} \omega$.

Esercizio A3. [punti 6] Calcolare $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$, dove S è la superficie laterale della porzione di ellissoide $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 4, z \leq \frac{1}{2}\}$, orientata nel verso della normale esterna $\vec{n}_e$, e

$$\vec{F}(x,y,z) = x^2 yz\, \vec{\imath} - xy^2 z\, \vec{\jmath} + \log(1 + x^2 + y^2)\, \vec{k}.$$

Esercizio A4. [punti 6] Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)e^{nx}}{e^{2n}},$$

(a) determinare gli insiemi di convergenza puntuale (o semplice) e assoluta,
(b) determinare il generico insieme di convergenza uniforme.

Esercizio A5. [punti 6] Determinare gli eventuali punti di equilibrio, e tracciare il diagramma di fase per il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = y^2 \\ y' = y. \end{cases} \tag{E}$$

Determinare, inoltre, la traiettoria di fase e la soluzione di (E) che soddisfano le condizioni iniziali $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (11/7/2023)

Esercizio A1. [punti 6] Data la seguente funzione

$$f(x,y) = x^3 - y^3$$

(a) determinarne i punti stazionari e la loro natura,
(b) determinare massimo e minimo di f in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Svolgimento: (a) I punti stazionari sono soluzioni di

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 = 0 \\ f_y(x,y) = -3y^2 = 0 \end{cases}$$

che fornisce il punto $P_1 = (0,0)$. Poiché $\det H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, nulla si può dire sulla natura di P_1.
(b) Poiché D è chiuso e limitato e f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:
$(b1)$ tra i punti stazionari interni a D. In questo caso, $P_1 \in D^o$.
$(b2)$ tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f. In questo caso non ci sono.
$(b3)$ tra i punti di frontiera di D. Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Osserviamo che $\mathcal{F}D$ è costituita dalla circonferenza $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange per studiare $f|_C$, e ci accontentiamo di trovare i punti stazionari della Lagrangiana [tra questi ci saranno anche i punti di massimo e minimo di $f|_C$]. Introduciamo la funzione di vincolo $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y) &= 2x = 0 \\ g_y(x,y) &= 2y = 0 \\ g(x,y) &= x^2 + y^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.
Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) &= 3x^2 + 2x\lambda = x(3x + 2\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) &= -3y^2 + 2y\lambda = y(-3y + 2\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + y^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ -1 = 0, \end{cases} \quad \bigvee \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm 1, \end{cases} \quad \bigvee \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1, \end{cases} \quad \bigvee \begin{cases} y = \frac{2}{3}\lambda = -x \\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

cioè i punti $P_\pm = (0, \pm 1)$, $Q_\pm = (\pm 1, 0)$, $R_\pm = (\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \mp \frac{1}{\sqrt{2}})$.
$(b4)$ Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(P_1) = 0$, $f(P_\pm) = \mp 1$, $f(Q_\pm) = \pm 1$, $f(R_\pm) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Quindi $\min_D f = -1$ e $\max_D f = 1$.

Esercizio A2. [punti 6] Siano $T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{4}x^2 + y^2 \le 1\}$, e ω la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \left(x^2 y + \frac{x}{x^2+y^2}\right) dx + \left(x^3 + \frac{y}{x^2+y^2}\right) dy.$$

(a) Dire se ω è chiusa e/o esatta in $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
(b) Calcolare $\int_{\partial^+ T} \omega$.

Svolgimento: (a) Posto $\omega(x,y) = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$, si ha $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} - x^2 + \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = 2x^2 \neq 0$, per cui ω non è chiusa in D, e quindi nemmeno esatta.

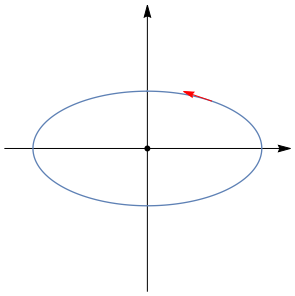

Figura 1: Cammino $\partial^+ T$

(b) Osserviamo che $\omega = \omega_1 + \omega_2$, dove $\omega_1(x,y) := x^2 y\,dx + x^3\,dy$ non è chiusa in D, e $\omega_2(x,y) := \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$ è chiusa in D. Allora usiamo il teorema di Gauss-Green per calcolare $\int_{\partial^+ T} \omega_1$, e l'invarianza omotopica dell'integrale di una forma chiusa per calcolare $\int_{\partial^+ T} \omega_2$. Posto $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\partial^+ T} \omega &= \int_{\partial^+ T} \omega_1 + \int_{\partial^+ T} \omega_2 = \iint_T 2x^2\,dxdy + \int_{\partial^+ T} \omega_2 \overset{(a)}{=} 2\int_{T_{\varrho\vartheta}} 4\varrho^2 \cos^2\vartheta\, 2\varrho\, d\varrho\, d\vartheta + \int_\gamma \omega_2 \\ &= 16\int_0^{2\pi} \cos^2\vartheta \left(\int_0^1 \varrho^3\,d\varrho\right) d\vartheta = 16\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\vartheta}{2}\left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 d\vartheta = 4\pi,\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di coordinate $x = 2\varrho\cos\vartheta, y = \varrho\sin\vartheta$.

Esercizio A3. [punti 6] Calcolare $\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$, dove S è la superficie laterale della porzione di ellissoide $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+4z^2\le 4, z\le \frac{1}{2}\}$, orientata nel verso della normale esterna $\vec{n}_e$, e

$$\vec{F}(x,y,z)=x^2yz\,\vec{\imath}-xy^2z\,\vec{\jmath}+\log(1+x^2+y^2)\,\vec{k}.$$

Svolgimento: Sia $S'=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 3, z=\frac{1}{2}\}$, per cui $\partial T = S\cup S'$. Una parametrizzazione di S' è $\Phi(x,y)=(x,y,\frac{1}{2})$, $(x,y)\in A:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\le 3\}$, il cui vettore normale è $\Phi_x\wedge\Phi_y=\vec{k}$, che è esterno a T. Dal teorema della divergenza si ha

$$\iiint_T \operatorname{div}\vec{F}\,dxdydz=\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}_e\,d\sigma+\int_{S'}\vec{F}\cdot\vec{n}_e\,d\sigma,$$

dove $\vec{n}_e$ è il versore normale esterno rispetto a T. Poiché $\operatorname{div}F=0$, si ha

$$\begin{aligned}\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}_e\,d\sigma &= -\int_{S'}\vec{F}\cdot\vec{n}_e\,d\sigma=-\iint_A \vec{F}\circ\Phi\cdot\Phi_x\wedge\Phi_y\,dxdy\\ &=-\iint_A \log(x^2+y^2+1)\,dxdy \overset{(a)}{=} -\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\log(\varrho^2+1)\,\varrho\,d\varrho d\vartheta\\ &\overset{(b)}{=} -\pi\int_1^4 \log t\,dt=-\pi\Big[t(\log t-1)\Big]_1^4=\pi(3-4\log 4),\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambio di coordinate $x=\varrho\cos\vartheta$, $y=\varrho\sin\vartheta$, e in (b) il cambio di variabile $\varrho^2+1=t$, $2\varrho\,d\varrho=dt$.

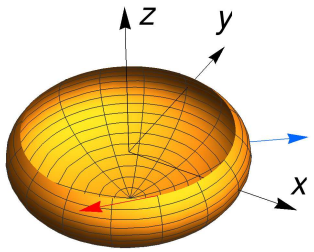

Figura 2: Superficie S, e orientazione del suo bordo (in rosso)

Esercizio A4. [punti 6] Data la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)e^{nx}}{e^{2n}},$$

(a) determinare gli insiemi di convergenza puntuale (o semplice) e assoluta,
(b) determinare il generico insieme di convergenza uniforme.

Svolgimento: (Primo metodo: trasformazione in serie di potenze) Posto $y = \varphi(x) = e^{x-2}$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)y^n$, che è una serie di potenze, il cui raggio di convergenza è $\frac{1}{\varrho} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$. Per $y = 1$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)$, che non converge. Per $y = -1$, la serie diventa $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)$, che non converge. Quindi, la serie di potenze converge assolutamente e semplicemente per ogni $y \in (-1,1)$, e uniformemente in $[-1+\delta, 1-\delta]$, $\forall \delta > 0$.
Tornando alla serie proposta, poiché $-1 < e^{x-2} < 1 \iff x < 2$, la serie data converge assolutamente e semplicemente in $(-\infty, 2)$, e uniformemente in $(-\infty, 2-\delta]$, per ogni $\delta > 0$.
(Secondo metodo: serie di funzioni) Applicando il criterio della radice, ad $x \in \mathbb{R}$ fissato, si ha $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}e^{x-2} = e^{x-2} < 1 \iff x < 2$. Se $x = 2$, la serie data diventa $\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)$ che diverge, per cui la serie data converge puntualmente e assolutamente in $(-\infty, 2)$, e non converge altrove.
Per la convergenza uniforme, applichiamo il criterio di Weierstrass, e sia

$$M_n := \sup_{x\le 2-\delta} (n+1)e^{n(x-2)} = (n+1)e^{-n\delta}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},$$

perché la funzione $e^{n(x-2)}$ è strettamente crescente. Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, la serie data converge uniformemente in $(-\infty, 2-\delta]$, per ogni $\delta > 0$.

Esercizio A5. [punti 6] Determinare gli eventuali punti di equilibrio, e tracciare il diagramma di fase per il seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = y^2 \\ y' = y. \end{cases} \tag{E}$$

Determinare, inoltre, la traiettoria di fase e la soluzione di (E) che soddisfano le condizioni iniziali $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

Svolgimento: I punti di equilibrio nel piano delle fasi sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x' = y^2 = 0 \\ y' = y = 0 \end{cases} \iff y = 0.$$

Le traiettorie di fase sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} y \neq 0 \\ y'(x) = \frac{1}{y} \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} y \neq 0 \\ x'(y) = y. \end{cases}$$

Integrando la prima equazione si ottiene

$$\int y\,dy = \int dx \iff \frac{1}{2}y^2 = x + c \iff y = \pm\sqrt{2x + C}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo che $\mathbb{R}^2$ è unione disgiunta delle orbite

$\{(x,0)\}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$

$\left\{\left(x, \pm\sqrt{2x+C}\right) : x > -\frac{C}{2}\right\} = \left\{\left(\frac{1}{2}(y^2-C), y\right) : y \in \mathbb{R}\right\}, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$

Alcune traiettorie di fase sono riportate in figura 3.

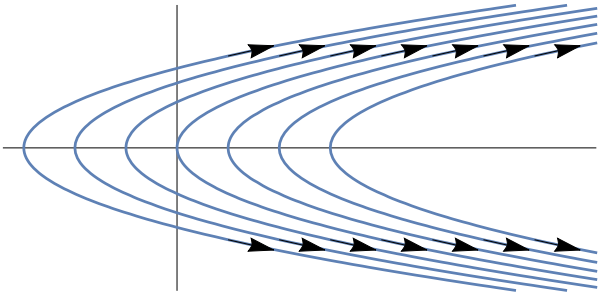

Figura 3: Diagramma di fase

Per determinare la traiettoria di fase richiesta, imponiamo la condizione iniziale $y(1) = 1$, e otteniamo $C = -1$, per cui

$$y(x) = \sqrt{2x-1}, \qquad x > \frac{1}{2}.$$

Cerchiamo infine la soluzione di (E) che soddisfa le condizioni iniziali. Deve essere

$$x' = y(x)^2 = 2x - 1, \qquad x > \frac{1}{2},$$

per cui

$$t + c = \int dt = \int \frac{dx}{2x-1} = \frac{1}{2}\log|2x-1|.$$

Dalla condizione iniziale $x(0) = 1$ segue $c = 0$, per cui

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(e^{2t}+1), & t \in \mathbb{R}, \\ y(t) = \sqrt{2x(t)-1} = e^t, & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (5/9/2023)

Esercizio A1. [punti 6] Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2,$$

su $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio A2. [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iiint_D y^2(2-z)\, dxdydz$$

dove $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq (1-z)^2, 0 \leq z \leq 1\}$ è una porzione di cono.

Esercizio A3. [punti 6] Calcolare $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma$, dove S è la superficie laterale del paraboloide

$$T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq x \leq 4\},$$

orientata nel verso della normale esterna, e

$$\vec{F}(x,y,z) = (y^2z^2 + 1)\,\vec{\imath} + \frac{2y}{x^2+1}\,\vec{\jmath} - \frac{2z}{x^2+1}\,\vec{k}.$$

Esercizio A4. [punti 6] Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2}{1+n^2x^2}\,,$$

(a) determinare l'insieme di convergenza puntuale e $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$,
(b) determinare il generico intervallo di convergenza uniforme della successione.

Esercizio A5. [punti 6] Data l'equazione differenziale

$$u'' = -2(u')^2 \operatorname{tg} u\,, \qquad (E)$$

determinare i punti di equilibrio, e tracciare il diagramma di fase. Determinare la soluzione di (E) che soddisfa le condizioni iniziali $u(1) = 0$, $u'(1) = 2$.

Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (5/9/2023)

Esercizio A1. [punti 6] Determinare massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2,$$

su $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Svolgimento: Poiché D è chiuso e limitato e f è continua su D, il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D. Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:
(a) tra i punti stazionari interni a D. Cerchiamo, cioè, le soluzioni $(x,y) \in D^o$ del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = x^2 = 0 \\ f_y(x,y) = y = 0 \end{cases}$$

che fornisce il punto $(0,0)$.
(b) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f. In questo caso non ci sono.
(c) tra i punti di frontiera di D. Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Per determinare il massimo e il minimo di f sull'insieme $S = \{(x,y) \in D : x^2 + y^2 = 1\}$, usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e ci accontentiamo di trovare i punti stazionari della Lagrangiana [tra questi ci saranno anche i punti di massimo e minimo di $f|_S$].
Introduciamo la funzione di vincolo $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$, e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x,y) = 2x = 0 \\ g_y(x,y) = 2y = 0 \\ g(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

che non ha soluzione.
Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x,y,\lambda) &= x^2 + 2x\lambda = x(x+2\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_y(x,y,\lambda) &= y + 2y\lambda = y(1+2\lambda) = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x,y,\lambda) &= x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

che equivale a

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x = 0 \\ 1 + 2\lambda = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\bigvee \begin{cases} x + 2\lambda = 0 \\ y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \bigvee \begin{cases} x + 2\lambda = 0 \\ 1 + 2\lambda = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Il primo sistema è assurdo. Il secondo fornisce i punti $P_\pm = (0, \pm 1)$. Il terzo fornisce i punti $Q_\pm = (\pm 1, 0)$. Il quarto fornisce il punto $Q_+ = (1,0)$.
(d) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(O) = 0$, $f(P_\pm) = \frac{1}{2}$, $f(Q_\pm) = \pm\frac{1}{3}$. Quindi $\min_D f = -\frac{1}{3}$ e $\max_D f = \frac{1}{2}$.

Esercizio A2. [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iiint_D y^2(2-z)\,dxdydz$$

dove $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le(1-z)^2, 0\le z\le 1\}$ è una porzione di cono.

Svolgimento: Si ha

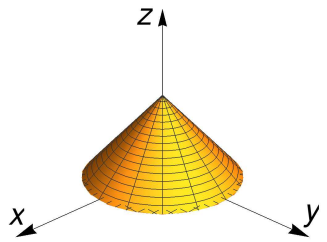

Figura 1: Dominio D

$$\begin{aligned}\iiint_D y^2(2-z)\,dxdydz &\overset{(a)}{=} \iint_{D_{\varrho\vartheta z}} (2-z)\varrho^2\sin^2\varphi\,\varrho\,d\varrho d\vartheta dz\\ &= \int_0^1 (2-z)\left(\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\int_0^{1-z}\varrho^3\,d\varrho\right)dz \overset{(b)}{=} \pi\int_0^1(2-z)\Big[\frac{\varrho^4}{4}\Big]_0^{1-z}dz\\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^1(2-z)(1-z)^4\,dz \overset{(c)}{=} \frac{\pi}{4}\int_0^1 t^4(t+1)\,dt = \frac{\pi}{4}\Big[\frac{t^6}{6}+\frac{t^5}{5}\Big]_0^1 = \frac{11\pi}{120},\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambio di variabile $x=\varrho\cos\vartheta$, $y=\varrho\sin\vartheta$, $z=z$, per cui $D_{\varrho\vartheta z}=\{(\varrho,\vartheta,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\le\varrho\le 1-z, \vartheta\in[0,2\pi], z\in[0,1]\}$, in (b) il risultato $\int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi=\pi$, e in (c) la sostituzione $t=1-z$.

Esercizio A3. [punti 6] Calcolare $\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$, dove S è la superficie laterale del paraboloide

$$T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y^2+z^2\le x\le 4\},$$

orientata nel verso della normale esterna, e

$$\vec{F}(x,y,z)=(y^2z^2+1)\,\vec{\imath}+\frac{2y}{x^2+1}\,\vec{\jmath}-\frac{2z}{x^2+1}\,\vec{k}.$$

Svolgimento: Sia $S'=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : y^2+z^2\le 4, x=4\}$, per cui $\partial T = S\cup S'$. Una parametrizzazione di S' è $\Phi(y,z)=(4,y,z)$, $(y,z)\in A:=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 : y^2+z^2\le 4\}$, il cui vettore normale è $\Phi_y\wedge\Phi_z=\vec{\imath}$, che è esterno a T. Dal teorema della divergenza si ha

$$\iiint_T \operatorname{div}\vec{F}\,dxdydz = \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}_e\,d\sigma+\int_{S'}\vec{F}\cdot\vec{n}_e\,d\sigma,$$

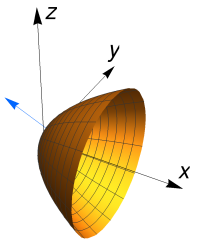

Figura 2: Superficie S

dove $\vec{n}_e$ è il versore normale esterno rispetto a T. Poiché $\operatorname{div} F = 0$, si ha

$$\begin{aligned}\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}_e\,d\sigma &= -\int_{S'}\vec{F}\cdot\vec{n}_e\,d\sigma = -\iint_A \vec{F}\circ\Phi\cdot\Phi_y\wedge\Phi_z\,dydz\\ &= -\iint_A (y^2z^2+1)\,dydz \overset{(a)}{=} -\int_0^{2\pi}\int_0^2 (1+\varrho^4\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta)\,\varrho\,d\varrho d\vartheta\\ &\overset{(b)}{=} -\int_0^{2\pi}\Big[\frac{\varrho^2}{2}\Big]_0^2 d\vartheta - \int_0^{2\pi}\Big[\frac{\varrho^6}{6}\Big]_0^2\frac{1}{8}(1-\cos 4\vartheta)d\vartheta = -4\pi - \frac{8}{3}\pi = -\frac{20}{3}\pi,\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambio di coordinate $y = \varrho\cos\vartheta$, $z = \varrho\sin\vartheta$, e in (b) il risultato $\cos^2\vartheta\sin^2\vartheta = \frac{1}{4}\sin^2(2\vartheta) = \frac{1}{8}(1-\cos 4\vartheta)$.

Esercizio A4. [punti 6] Data la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{n^2}{1+n^2x^2}\,,$$

(a) determinare l'insieme di convergenza puntuale e $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$,
(b) determinare il generico intervallo di convergenza uniforme della successione.

Svolgimento: Osserviamo che

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases}+\infty, & x = 0,\\ \frac{1}{x^2}, & x\neq 0,\end{cases}$$

e quindi la successione converge per ogni $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Poiché $f\notin C^0(\mathbb{R})$, $f_n \not\rightrightarrows f$ in $\mathbb{R}$. Inoltre, per ogni $a>0$,

$$|f_n(x)-f(x)| = \frac{1}{x^2} - \frac{n^2}{1+n^2x^2} = \frac{1}{x^2(1+n^2x^2)}$$

è pari, e decrescente in $[a,+\infty)$, per cui

$$\sup_{|x|\geq a}|f_n(x)-f(x)| = \frac{1}{a^2(1+n^2a^2)} \to 0,$$

e quindi $f_n \rightrightarrows f$ in $(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$, per ogni $a>0$.

Esercizio A5. [punti 6] Data l'equazione differenziale

$$u'' = -2(u')^2 \operatorname{tg} u\,, \tag{E}$$

determinare i punti di equilibrio, e tracciare il diagramma di fase. Determinare la soluzione di (E) che soddisfa le condizioni iniziali $u(1) = 0$, $u'(1) = 2$.

Svolgimento: L'equazione differenziale è della forma $u'' = f(u, u')$, con $f(x, y) = -2y^2 \operatorname{tg} x$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. I punti di equilibrio nel piano delle fasi sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} u' = 0 \\ u'' = f(u, u') = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ f(x, 0) = 0 \end{cases} \iff y = 0, x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Le traiettorie di fase sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{f(x, y(x))}{y(x)} = -2y(x) \operatorname{tg} x.$$

Integrando si ottiene

$$\log |y(x)| = \int \frac{dy}{y} = -2 \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = 2 \log |\cos x| + \widetilde{c} \iff y(x) = C \cos^2 x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Il diagramma di fase è riportato in figura 3, per $C \in \{-4, -3, \ldots, 4\}$.

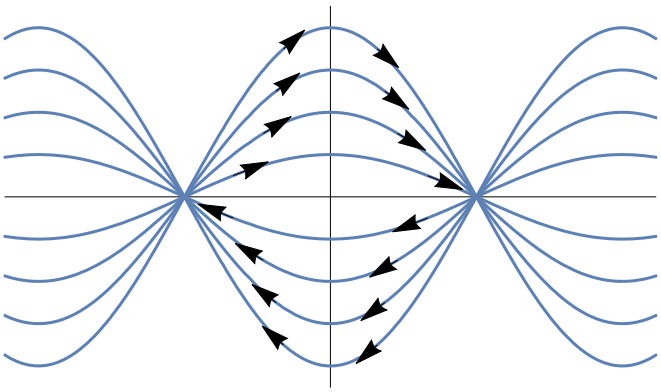

Figura 3: Diagramma di fase

Per determinare la soluzione del problema di Cauchy proposto, imponiamo la condizione iniziale $y(0) = 2$, ottenendo $C = 2$, per cui la traiettoria di fase cercata è

$$y(x) = 2 \cos^2 x, \qquad \forall x \in \Big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \Big).$$

Ricordando che $(x, y) = (u, u')$, si ottiene l'equazione differenziale $u' = 2 \cos^2 u$, che ha soluzione $2t + c = \int 2\, dt = \int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u$. Usando la condizione iniziale, si ha $c = -2$, per cui

$$u(t) = \operatorname{arctg}(2t - 2), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (19/9/2023)

Esercizio A1. [punti 6] Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità di

$$f(x,y) = \begin{cases} y^3 \log(x^2+y^2) + x^2y^2 + 2y & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Determinare l'eventuale equazione del piano tangente al grafico nel punto $(0,0)$.

Esercizio A2. [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x+4}}\, dxdy\ ,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5 \leq x \leq 12, \frac{1}{\sqrt{x}} \leq y \leq \sqrt{x-3}\}$.

Esercizio A3. [punti 6] Siano T la semicorona circolare

$$T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 9, x \geq 0\}$$

e ω la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \left(\cos x - \frac{3y}{(x-2)^2+y^2}\right) dx + \left(\cos y^2 + \frac{3(x-2)}{(x-2)^2+y^2}\right) dy.$$

(a) Dire se ω è chiusa e/o esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0)\}$.
(b) Calcolare $\int_{\partial^+ T} \omega$.

Esercizio A4. [punti 6] Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(2x)^n}, \quad x \neq -\frac{1}{2},$$

(a) determinare l'insieme di convergenza puntuale,
(b) determinare l'insieme di convergenza assoluta.

Esercizio A5. [punti 6] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},\ y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Corso di studi in Fisica – Calcolo 2 (19/9/2023)

Esercizio A1. [punti 6] Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità di

$$f(x,y) = \begin{cases} y^3 \log(x^2+y^2) + x^2y^2 + 2y & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Determinare l'eventuale equazione del piano tangente al grafico nel punto $(0,0)$.

Svolgimento: La continuità di f in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. In $(0,0)$ si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y^3 \log(x^2+y^2) + x^2y^2 + 2y = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^3 \log(x^2+y^2) = \lim_{\varrho\to 0} \varrho^3 \sin^3\vartheta \log(\varrho^2) = 0,$$

perché $\varrho^3 \log(\varrho^2) \to 0$ e $|\sin^3\vartheta| \leq 1$. Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$.
Calcoliamo le derivate parziali in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{2xy^3}{x^2+y^2} + 2xy^2 \\ f_y(x,y) &= 3y^2 \log(x^2+y^2) + \frac{2y^4}{x^2+y^2} + 2x^2y + 2. \end{aligned}$$

Quindi le derivate parziali sono anche continue in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Calcoliamole in $(0,0)$. Si ha

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} t \log(t^2) = 0 \\ f_y(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3 \log(t^2) + 2t}{t} = 2. \end{aligned}$$

Infine, f è differenziabile in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$, perché le derivate parziali sono continue in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. In $(0,0)$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f_y(0,0)y}{(x^2+y^2)^{1/2}} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3 \log(x^2+y^2) + x^2y^2 + 2y - 2y}{(x^2+y^2)^{1/2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3 \log(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^{1/2}} + \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{1/2}} \\ &= \lim_{\varrho\to 0} \left(\varrho^2 \log(\varrho^2) \sin^3\vartheta + \varrho^3 \cos^2\vartheta \sin^2\vartheta\right) = 0, \end{aligned}$$

perché $\varrho^2 \log(\varrho^2) \to 0$, $\varrho^3 \to 0$, e $|\sin^3\vartheta| \leq 1$, $|\cos^2\vartheta \sin^2\vartheta| \leq 1$. Quindi f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.
Il piano tangente al grafico di f in $(0,0)$ ha equazione $z = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y = 2y$.

Esercizio A2. [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{y}{\sqrt{x+4}}\,dxdy\ ,$$

dove $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5 \le x \le 12, \frac{1}{\sqrt{x}} \le y \le \sqrt{x-3}\}$.

Svolgimento: Si ha

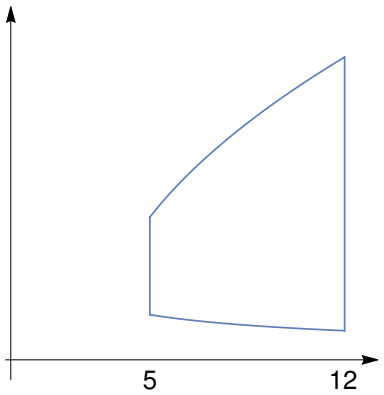

Figura 1: Dominio D

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{y}{\sqrt{x+4}}\,dxdy &= \int_5^{12}\left(\int_{1/\sqrt{x}}^{\sqrt{x-3}} \frac{y}{\sqrt{x+4}}\,dy\right)dx = \int_5^{12}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{1/\sqrt{x}}^{\sqrt{x-3}}\frac{dx}{\sqrt{x+4}}\\ &= \frac{1}{2}\int_5^{12}\left(x-3-\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{\sqrt{x+4}} \overset{(a)}{=} \int_3^4\left(t^2-7-\frac{1}{t^2-4}\right)dt\\ &\overset{(b)}{=} \left[\frac{t^3}{3}-7t-\frac{1}{4}\log\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\right]_3^4 = \frac{16}{3}-\frac{1}{4}\log\frac{5}{3}\,,\end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambio di variabile $\sqrt{x+4} = t \iff x = t^2-4$, e in (b) la decomposizione $\frac{1}{t^2-4} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)$.

Esercizio A3. [punti 6] Siano T la semicorona circolare

$$T := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 9, x \ge 0\}$$

e ω la forma differenziale

$$\omega(x,y) = \left(\cos x - \frac{3y}{(x-2)^2+y^2}\right)dx + \left(\cos y^2 + \frac{3(x-2)}{(x-2)^2+y^2}\right)dy.$$

(a) Dire se ω è chiusa e/o esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0)\}$.
(b) Calcolare $\int_{\partial^+ T}\omega$.

Svolgimento:
(a) Posto $\omega(x,y) = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy$, si ha $\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 3\frac{y^2-(x-2)^2}{(x^2+y^2)^2} - 3\frac{y^2-(x-2)^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$, per cui ω è chiusa in $D := \mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0)\}$, che non è semplicemente connesso.
(b) Osserviamo che $\omega = \omega_1 + \omega_2$, dove $\omega_1(x,y) := \cos x\,dx + \cos y^2\,dy$ è chiusa, e quindi esatta, in $\mathbb{R}^2$, e $\omega_2(x,y) := \frac{-3y\,dx+3(x-2)\,dy}{(x-2)^2+y^2}$ è chiusa in D. Allora usiamo l'invarianza omotopica

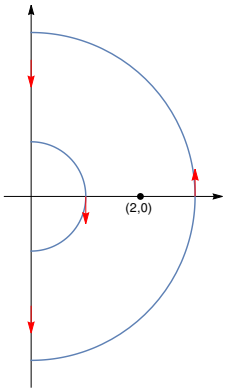

Figura 2: Dominio T

dell'integrale di una forma chiusa per calcolare $\int_{\partial^+ T} \omega_2$. Posto $\gamma(t) := (2+\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, si ha

$$\int_{\partial^+ T} \omega = \int_{\partial^+ T} \omega_1 + \int_{\partial^+ T} \omega_2 = \int_{\gamma} \omega_2 = 3 \int_0^{2\pi} (\sin^2 \vartheta + \cos^2 \vartheta)\, d\vartheta = 6\pi,$$

per cui ω non è esatta in D.

Esercizio A4. [punti 6] Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+(2x)^n}, \quad x \neq -\frac{1}{2},$$

(a) determinare l'insieme di convergenza puntuale,
(b) determinare l'insieme di convergenza assoluta.

Svolgimento: Sia $a_n := \frac{1}{1+(2x)^n}$, $n \in \mathbb{N}$. Per $|x| < \frac{1}{2}$ si ha $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ e la serie non converge. Per $x = \frac{1}{2}$ si ha $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ e la serie non converge. Sia $|x| > \frac{1}{2}$. Poiché $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{|1+(2x)^n|}} = \frac{1}{2|x|}(1+o(1))$, la serie converge assolutamente per $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$. Quindi la serie converge assolutamente in $(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$. Non converge altrove.

Esercizio A5. [punti 6] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \; y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento: Cerchiamo gli autovalori di A:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\big((3-\lambda)(1-\lambda)+1\big) = (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) \\ &= (2-\lambda)^3 = 0, \end{aligned}$$

da cui si ottiene la soluzione $\lambda_1 = 2$ (tripla).
Autovettori per $\lambda_1 = 2$:

$$0 = (A - 2I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff x_1 - x_2 + x_3 = 0.$$

Poiché ci sono solo due autovettori indipendenti (perché c'è una sola relazione lineare fra le coordinate), occorre cercare un autovettore generalizzato:

$$0 = (A - 2I)^2\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \iff \forall \vec{v},$$

e quindi scegliamo $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 \in \ker(A-I)^2 \setminus \ker(A-I)$, e $\vec{v}_2 = (A-2I)\vec{v}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \in \ker(A-2I)$.
Infine, un secondo autovettore indipendente dal precedente è $\vec{v}_3 = \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.
Da $y_0 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$ si ricava

$$\begin{cases} 0 = y_1(0) = c_1 + c_2 \\ 1 = y_2(0) = c_2 + c_3 \\ 2 = y_3(0) = c_3 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 2. \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi:

$$\begin{aligned} y(t) = e^{At}y_0 &= c_1e^{At}\vec{v}_1 + c_2e^{At}\vec{v}_2 + c_3e^{At}\vec{v}_3 = c_1e^{2t}\big(I + (A-2I)t\big)\vec{v}_1 + c_2e^{2t}\vec{v}_2 + c_3e^{2t}\vec{v}_3 \\ &= c_1e^{2t}\vec{v}_1 + (c_1t + c_2)e^{2t}\vec{v}_2 + c_3e^{2t}\vec{v}_3 = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (t-1)e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} 2e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} y_1(t) &= te^{2t} \\ y_2(t) &= (1+t)e^{2t} \\ y_3(t) &= 2e^{2t}. \end{aligned}$$