

Esercizio A1. [punti 6] Data la seguente funzione

$$f(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + 3xy$$

- (a) determinarne i punti stazionari e la loro natura,
- (b) determinare massimo e minimo di f in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio A2. [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\int \int_D \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

Esercizio A3. [punti 6] Calcolare $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$, dove S è la semisfera

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0\},$$

orientata in modo che il versore normale punti verso l'origine $(0, 0, 0)$, e

$$\vec{F}(x, y, z) = (y + z^2) \vec{i} + y^2 \vec{j} - (1 + 2y)z \vec{k}.$$

Esercizio A4. [punti 6] Data la successione

$$f_n(x) := \frac{nx - 1}{n^2x^2 - 4nx + 5}, \quad x \in \mathbb{R},$$

- (a) determinare l'insieme di convergenza puntuale e $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$,
- (b) verificare se f_n converge uniformemente in $[1, 2]$,
- (c) determinare il generico intervallo di convergenza uniforme.

Esercizio A5. [punti 6] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio A1. [punti 6] Data la seguente funzione

$$f(x, y) = 2x^2 - 2y^2 + 3xy$$

- (a) determinarne i punti stazionari e la loro natura,
 (b) determinare massimo e minimo di f in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Svolgimento: (a) I punti stazionari sono soluzioni di

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 4x + 3y = 0 \\ f_y(x, y) = -4y + 3x = 0 \end{cases}$$

che forniscono il punto $P_1 = (0, 0)$. Poiché $\det H_f(0, 0) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -25 < 0$, concludiamo che $(0, 0)$ è di sella.

(b) Poiché D è chiuso e limitato e f è continua su D , il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D . Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

(b1) tra i punti stazionari interni a D . In questo caso, $P_1 \in D^\circ$.

(b2) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f . In questo caso non ci sono.

(b3) tra i punti di frontiera di D . Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Usiamo il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, e ci accontentiamo di trovare i punti stazionari della Lagrangiana [tra questi ci saranno anche i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$].

Introduciamo la funzione di vincolo $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ e determiniamo dapprima i punti non regolari per il vincolo, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} g_x(x, y) = 2x = 0 \\ g_y(x, y) = 2y = 0 \\ g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

che non ha soluzione.

Introduciamo ora la Lagrangiana $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, e cerchiamo i punti stazionari di $\mathcal{L}$, cioè le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_x(x, y, \lambda) = 4x + 3y + 2x\lambda = 0 \\ \mathcal{L}_y(x, y, \lambda) = -4y + 3x + 2y\lambda = 0 \\ \mathcal{L}_\lambda(x, y, \lambda) = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

che implica, moltiplicando la prima equazione per y , e la seconda per $-x$ e sommando,

$$\begin{aligned} \begin{cases} 8xy + 3y^2 - 3x^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} 8xy + 3y^2 - 3(1 - y^2) = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = \frac{3-6y^2}{8y} \\ \left(\frac{3-6y^2}{8y}\right)^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 100y^4 - 100y^2 + 9 = 0 \\ x = \frac{3-6y^2}{8y} \end{cases} \end{aligned}$$

cioè i punti $P_\pm = (\pm \frac{3}{\sqrt{10}}, \pm \frac{1}{\sqrt{10}})$, $Q_\pm = (\mp \frac{1}{\sqrt{10}}, \pm \frac{3}{\sqrt{10}})$.

Soluzione alternativa del sistema:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = \frac{-3y}{2\lambda+4} \\ (2\lambda-4)y - \frac{9}{2\lambda+4}y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} x = \frac{-3y}{2\lambda+4} \\ (4\lambda^2 - 25)y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \lambda = \frac{5}{2} \\ x = -\frac{y}{3} \\ \frac{y^2}{9} + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \lambda = -\frac{5}{2} \\ x = 3y \\ 9y^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Il primo sistema è assurdo, il secondo fornisce i punti $P_{\pm} = (\pm\frac{3}{\sqrt{10}}, \pm\frac{1}{\sqrt{10}})$, e il terzo fornisce i punti $Q_{\pm} = (\mp\frac{1}{\sqrt{10}}, \pm\frac{3}{\sqrt{10}})$.

(b4) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(P_{\pm}) = \frac{5}{2}$, $f(Q_{\pm}) = -\frac{5}{2}$. Quindi $\min_D f = -\frac{5}{2}$ e $\max_D f = \frac{5}{2}$.

Esercizio A2. [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\int \int_D \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$.

Svolgimento: Posto, per ogni $a \in (0, 1)$, $D^a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \geq a^2\}$, si ha

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \iint_{D^a} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \stackrel{(a)}{=} \lim_{a \rightarrow 0^+} \iint_{D_{\varrho\vartheta}^a} \varrho^2 \cos^2 \vartheta d\varrho d\vartheta \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{-\arccos a/2}^{\arccos a/2} \cos^2 \vartheta \left[\frac{\varrho^3}{3} \right]_a^{2 \cos \vartheta} d\vartheta = \frac{1}{3} \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{-\arccos a/2}^{\arccos a/2} \cos^2 \vartheta (8 \cos^3 \vartheta - a^3) d\vartheta \\ &= \frac{8}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin^2 \vartheta)^2 \cos \vartheta d\vartheta - \frac{1}{3} \lim_{a \rightarrow 0^+} a^3 \int_{-\arccos a/2}^{\arccos a/2} \cos^2 \vartheta d\vartheta \\ &= \frac{8}{3} \int_{-1}^1 (1 - t^2)^2 dt = \frac{16}{3} \int_0^1 (1 - 2t^2 + t^4) dt = \frac{16}{3} \left[t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = \frac{128}{45}, \end{aligned}$$

dove in (a) si è posto $D_{\varrho\vartheta}^a = \{(\varrho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : a \leq \varrho \leq 2 \cos \vartheta, \vartheta \in [-\arccos \frac{a}{2}, \arccos \frac{a}{2}]\}$.

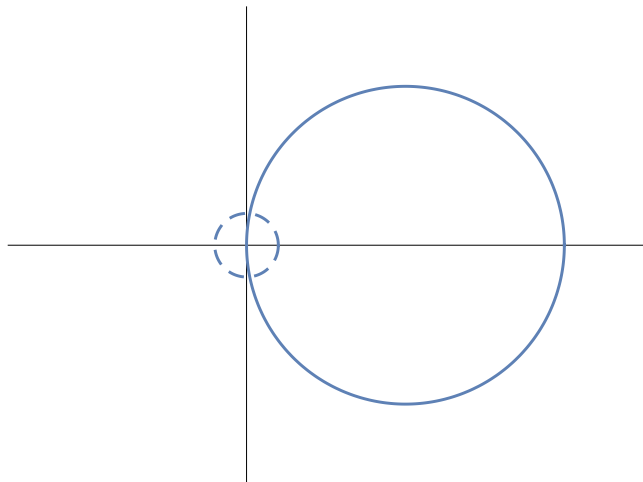


Figura 1: Grafico per l'esercizio A2

Esercizio A3. [punti 6] Calcolare $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$, dove S è la semisfera

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x \geq 0\},$$

orientata in modo che il versore normale punti verso l'origine $(0, 0, 0)$, e

$$\vec{F}(x, y, z) = (y + z^2) \vec{i} + y^2 \vec{j} - (1 + 2y)z \vec{k}.$$

Svolgimento: Sia $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0\}$, per cui $\partial D = S \cup S'$, dove $S' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y^2 + z^2 \leq 1, x = 0\}$. Una parametrizzazione di S' è $\Phi(y, z) = (0, y, z)$,

$(y, z) \in A := \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + z^2 \leq 1\}$, il cui vettore normale è $\Phi_y \wedge \Phi_z = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}$.

Dal teorema della divergenza si ha $\iiint_D \operatorname{div} F dx dy dz = - \int_S F \cdot \nu d\sigma - \int_{S'} F \cdot \nu d\sigma$, dove ν è il versore normale interno rispetto a D . Poiché $\operatorname{div} F = 2y - (1 + 2y) = -1$, si ha

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma &= - \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} - \int_{S'} F \cdot \nu d\sigma = \operatorname{vol}(D) - \iint_A \vec{F} \circ \Phi \cdot \Phi_y \wedge \Phi_z dy dz \\ &= \frac{2}{3}\pi - \iint_A (y + z^2) dy dz \stackrel{(a)}{=} \frac{2}{3}\pi - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \varrho^2 \sin^2 \vartheta \varrho d\varrho d\vartheta \\ &= \frac{2}{3}\pi - \left[\frac{\varrho^4}{4} \right]_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2} d\vartheta = \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{5}{12}\pi, \end{aligned}$$

dove in (a) si sono usate le simmetrie, e il cambio di coordinate $y = \varrho \cos \vartheta$, $z = \varrho \sin \vartheta$.

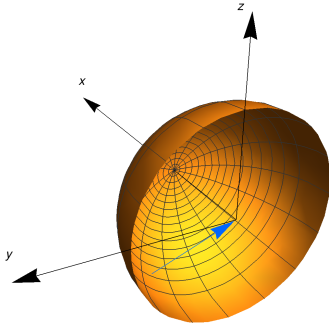


Figura 2: Grafico per l'esercizio A3

Esercizio A4. [punti 6] Data la successione

$$f_n(x) := \frac{nx - 1}{n^2x^2 - 4nx + 5}, \quad x \in \mathbb{R},$$

- (a) determinare l'insieme di convergenza puntuale e $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$,
- (b) verificare se f_n converge uniformemente in $[1, 2]$,
- (c) determinare il generico intervallo di convergenza uniforme.

Svolgimento: Osserviamo che

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ -\frac{1}{5}, & x = 0, \end{cases}$$

e quindi la successione converge per ogni $x \in \mathbb{R}$, ma il suo limite f non è continuo in $x = 0$, per cui f_n non converge uniformemente in $\mathbb{R}$. Poiché

$$f'_n(x) = \frac{n(1 + 2nx - n^2x^2)}{(n^2x^2 - 4nx + 5)^2} \geq 0 \iff x \in \left[\frac{1 - \sqrt{2}}{n}, \frac{1 + \sqrt{2}}{n} \right],$$

e $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_n(x) = 0$, otteniamo, per ogni $\delta > 0$, che

$$\sup_{|x| \geq \delta} |f_n(x) - f(x)| = \max\{f_n(\delta), |f_n(-\delta)|\} \rightarrow 0,$$

per cui $f_n \rightrightarrows 0$ in $(-\infty, -\delta] \cup [\delta, +\infty)$, e in particolare in $[1, 2]$.

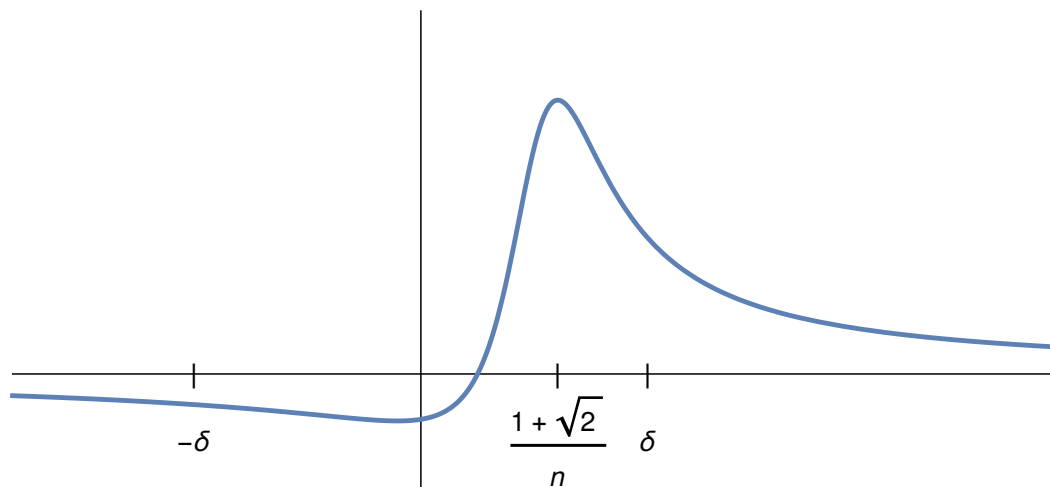


Figura 3: Grafico per l'esercizio A4

Esercizio A5. [punti 6] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento: Cerchiamo gli autovalori di A :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 0 \\ 1 & 3 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda) + 2 - \lambda = (2 - \lambda)(4 - 4\lambda + \lambda^2) = (2 - \lambda)^3 = 0,$$

da cui si ottiene la soluzione $\lambda_1 = 2$ (tripla).
Autovettori per $\lambda_1 = 2$:

$$0 = (A - 2I)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \iff v_1 + v_2 = 0.$$

Poiché ci sono solo 2 autovettori indipendenti [una condizione lineare significa che $\dim \ker(A - 2I) = 3 - 1 = 2$], occorre cercare gli autovettori generalizzati:

$$0 = (A - 2I)^2 \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \iff \forall \vec{v},$$

e quindi scegliamo $\vec{v}_3 = \vec{e}_2$, e $\vec{v}_2 = (A - 2I)\vec{v}_2 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, e possiamo prendere $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.
Da $y_0 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$ si ricava

$$\begin{cases} 1 = y_1(0) = c_1 - c_2 \\ 1 = y_2(0) = -c_1 + c_2 + c_3 \\ 1 = y_3(0) = c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 2. \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At} y_0 = c_1 e^{At} \vec{v}_1 + c_2 e^{At} \vec{v}_2 + c_3 e^{At} \vec{v}_3 = c_1 e^{2t} \vec{v}_1 + c_2 e^{2t} \vec{v}_2 + c_3 e^{2t} (I + (A - 2I)t) \vec{v}_3 \\ &= c_1 e^{2t} \vec{v}_1 + (c_2 + c_3 t) e^{2t} \vec{v}_2 + c_3 e^{2t} \vec{v}_3 = 2e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (1 + 2t) e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (1 - 2t)e^{2t} \\ y_2(t) &= (1 + 2t)e^{2t} \\ y_3(t) &= (1 + 2t)e^{2t}. \end{aligned}$$

CORSO DI STUDI IN FISICA – CALCOLO 2 (5/2/2021)

Esercizio A1. [punti 6] Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità di

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log(1 + xy^2)}{x^2 + y^2} + x - 3y^2 & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Determinare l'eventuale equazione del piano tangente al grafico nel punto $(0, 0)$.

Esercizio A2. [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iiint_D (2x + y^2)z \log(1 + z^2) \, dx dy dz,$$

dove $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z, 0 \leq z \leq 2\}$.

Esercizio A3. [punti 6] Siano T il triangolo di vertici $(-1, 2)$, $(-1, -1)$, e $(2, -1)$ e ω la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \left(\log(x + 2) - \frac{y}{x^2 + y^2} \right) dx + \left(xy + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dy.$$

(a) Dire se ω è chiusa e/o esatta in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > -2\} \setminus \{(0, 0)\}$.

(b) Calcolare $\int_{\partial^+ T} \omega$.

Esercizio A4. [punti 6] Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{3nx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

(a) determinare il generico insieme di convergenza uniforme,

(b) determinare la somma della serie.

Esercizio A5. [punti 6] Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = \frac{y}{x^2 + y^2} \\ y' = -\frac{x}{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (E)$$

determinare gli eventuali punti di equilibrio, e tracciare il diagramma di fase. Determinare la traiettoria di fase e la soluzione di (E) che soddisfano $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

Esercizio A1. [punti 6] Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità di

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log(1 + xy^2)}{x^2 + y^2} + x - 3y^2 & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Determinare l'eventuale equazione del piano tangente al grafico nel punto $(0, 0)$.

Svolgimento: (a) Il dominio di definizione di f è $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy^2 > -1\}$. La continuità di f in $D \setminus \{(0, 0)\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. In $(0, 0)$ si ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1 + xy^2)}{x^2 + y^2} + x - 3y^2 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2(1 + o(1))}{x^2 + y^2} = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho \cos \vartheta \sin^2 \vartheta = 0,$$

perché $\varrho \rightarrow 0$ e $|\cos \vartheta \sin^2 \vartheta| \leq 1$. Quindi f è continua in D .

(b) Calcoliamo le derivate parziali in $D \setminus \{(0, 0)\}$. Si ha

$$f_x(x, y) = \frac{\frac{y^2}{1+xy^2}(x^2 + y^2) - 2x \log(1 + xy^2)}{(x^2 + y^2)^2} + 1$$

$$f_y(x, y) = \frac{\frac{2xy}{1+xy^2}(x^2 + y^2) - 2y \log(1 + xy^2)}{(x^2 + y^2)^2} - 6y.$$

Quindi le derivate parziali sono anche continue in $D \setminus \{(0, 0)\}$. Calcoliamole in $(0, 0)$. Si ha

$$f_x(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{t} = 1$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-3t^2}{t} = 0.$$

(c) Infine, f è differenziabile in $D \setminus \{(0, 0)\}$, perché le derivate parziali sono continue in $D \setminus \{(0, 0)\}$. In $(0, 0)$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f_x(0, 0)x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{\log(1+xy^2)}{x^2+y^2} + x - 3y^2 - x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\log(1 + xy^2)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{3y^2}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2(1 + o(1))}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \\ &= \lim_{\varrho \rightarrow 0} \cos \vartheta \sin^2 \vartheta = \nexists, \end{aligned}$$

perché per $\vartheta = 0$ il limite è 0, mentre per $\vartheta = \pi/4$, il limite è $\frac{1}{\sqrt{8}}$. Quindi f non è differenziabile in $(0, 0)$, per cui non esiste il piano tangente al grafico di f in $(0, 0)$.

Esercizio A2. [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iiint_D (2x + y^2)z \log(1 + z^2) \, dx dy dz,$$

dove $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z, 0 \leq z \leq 2\}$.

Svolgimento: Posto $D(z) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq z\}$, $z \in [0, 2]$, si ha

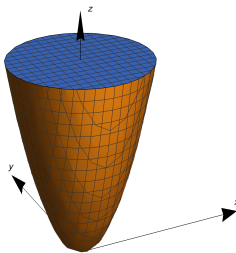


Figura 1: Dominio di integrazione

$$\begin{aligned} \iiint_D (2x + y^2)z \log(1 + z^2) \, dx dy dz &\stackrel{(a)}{=} \int_0^2 z \log(1 + z^2) \left(\int_{D(z)} y^2 \, dx dy \right) dz \\ &= \int_0^2 z \log(1 + z^2) \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} \varrho^2 \sin^2 \vartheta \, \varrho d\varrho d\vartheta \right) dz \\ &= \int_0^2 z \log(1 + z^2) \left(\int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2} \left[\frac{\varrho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{z}} d\vartheta \right) dz = \frac{\pi}{4} \int_0^2 z^3 \log(1 + z^2) \, dz \\ &\stackrel{(c)}{=} \frac{\pi}{8} \int_1^5 (t - 1) \log t \, dt \stackrel{(d)}{=} \frac{\pi}{8} \left[\left(\frac{1}{2}t^2 - t \right) \log t \right]_1^5 - \frac{\pi}{8} \int_1^5 \left(\frac{1}{2}t - 1 \right) dt \\ &= \frac{15}{16} \pi \log 5 - \frac{\pi}{8} \left[\frac{1}{4}t^2 - t \right]_1^5 = \frac{15}{16} \pi \log 5 - \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$

dove in (a) si sono usate le simmetrie, in (b) il cambiamento di variabili $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$, in (c) il cambiamento di variabili $1 + z^2 = t \implies 2z \, dz = dt$, e in (d) l'integrazioni per parti

$$\text{con } \begin{cases} f(t) = \log t, & f'(t) = \frac{1}{t} \\ g'(t) = t - 1, & g(t) = \frac{1}{2}t^2 - t. \end{cases}$$

Esercizio A3. [punti 6] Siano T il triangolo di vertici $(-1, 2)$, $(-1, -1)$, e $(2, -1)$ e ω la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \left(\log(x+2) - \frac{y}{x^2+y^2} \right) dx + \left(xy + \frac{x}{x^2+y^2} \right) dy.$$

(a) Dire se ω è chiusa e/o esatta in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > -2\} \setminus \{(0, 0)\}$.

(b) Calcolare $\int_{\partial^+ T} \omega$.

Svolgimento: Poniamo

$$\omega_1(x, y) = \log(x+2) dx + xy dy, \quad \omega_2(x, y) = \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2},$$

e osserviamo che

$$\frac{\partial}{\partial x} xy - \frac{\partial}{\partial y} \log(x+2) = y \neq 0,$$

per cui ω_1 non è chiusa in D , e

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} + \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0,$$

per cui ω_2 è chiusa in D , che non è semplicemente connesso. Poiché

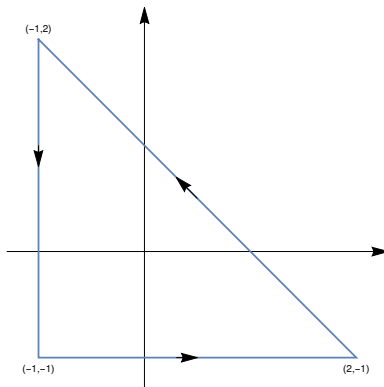


Figura 2: Cammino di integrazione

$$\int_{\partial^+ T} \omega = \int_{\partial^+ T} \omega_1 + \int_{\partial^+ T} \omega_2,$$

applichiamo al primo integrale il teorema di Gauss-Green, e al secondo l'invarianza omotopica, essendo $\partial^+ T$ omotopo al cammino $\gamma(t) := \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$, $t \in [0, 2\pi]$. Otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{\partial^+ T} \omega &= \int_T y dx dy + \int_{\gamma} \omega_2 = \int_{-1}^2 \left(\int_{-1}^{1-x} y dy \right) dx + \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= \int_{-1}^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1}^{1-x} dx + 2\pi = \frac{1}{2} \int_{-1}^2 (x^2 - 2x) dx + 2\pi = \frac{1}{2} \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_{-1}^2 + 2\pi = 2\pi. \end{aligned}$$

Esercizio A4. [punti 6] Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{3nx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

- (a) determinare il generico insieme di convergenza uniforme,
- (b) determinare la somma della serie.

Svolgimento: È una serie a termini positivi, per cui il criterio della radice fornisce

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{3x} \sqrt[n]{n} = e^{3x} < 1 \iff x < 0.$$

Poiché per $x = 0$ la serie non converge, la serie data converge puntualmente e assolutamente per ogni $x \in (-\infty, 0)$.

Per determinare il generico intervallo di convergenza uniforme, usiamo il criterio di Weierstrass, e calcoliamo, per ogni $a < 0$,

$$M_n := \sup_{x \leq a} n e^{3nx} = n e^{3na}.$$

Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, la serie converge uniformemente in $(-\infty, a]$, $\forall a < 0$.

Per quanto riguarda la somma della serie, osserviamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} n y^n = y \sum_{n=1}^{\infty} n y^{n-1} = y \frac{d}{dy} \sum_{n=0}^{\infty} y^n = y \frac{d}{dy} \frac{1}{1-y} = \frac{y}{(1-y)^2},$$

e quindi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n e^{3nx} = \frac{e^{3x}}{(e^{3x} - 1)^2}, \quad \forall x < 0.$$

Esercizio A5. [punti 6] Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = \frac{y}{x^2+y^2} \\ y' = -\frac{x}{x^2+y^2} \end{cases} \quad (E)$$

determinare gli eventuali punti di equilibrio, e tracciare il diagramma di fase. Determinare la traiettoria di fase e la soluzione di (E) che soddisfano $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

Svolgimento: I punti di equilibrio nel piano delle fasi sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x' = \frac{y}{x^2+y^2} = 0 \\ y' = -\frac{x}{x^2+y^2} = 0 \end{cases} \iff \nexists.$$

Le traiettorie di fase sono soluzioni dell'equazione differenziale $y'(x) = -\frac{x}{y}$, per cui integrando si ottiene $\int y dy = -\int x dx \iff y^2 = -x^2 + C$, cioè i grafici delle funzioni $y(x) = \pm\sqrt{C - x^2}$, $C > 0$. Il diagramma di fase è riportato in figura 3.

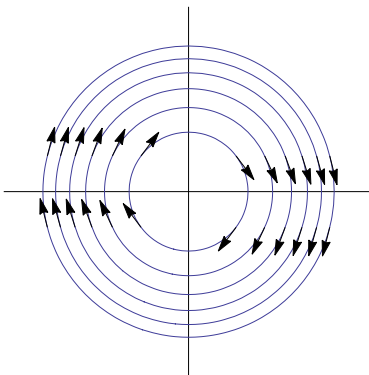


Figura 3: Diagramma di fase

Per determinare la traiettoria di fase richiesta, imponiamo il passaggio per $(x_0, y_0) = (1, 1)$, cioè $1 + 1 = C$, ottenendo $x^2 + y^2 = 2$, cioè (usando ancora le condizioni iniziali)

$$y(x) = \sqrt{2 - x^2}.$$

Cerchiamo infine la soluzione di (E) che soddisfa le condizioni iniziali. Deve essere $x' = \frac{y(x)}{x^2+y(x)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2 - x^2}$, $x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, per cui

$$t + c = \int dt = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{2 - x^2}} = 2 \arcsin \frac{x}{\sqrt{2}}.$$

Dalla condizione iniziale $x(0) = 1$ segue $c = 2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$, per cui

$$x(t) = \sqrt{2} \sin \left(\frac{t}{2} + \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sin \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} = \sqrt{2} \sin \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \quad t \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

Quindi

$$y(t) = \sqrt{2 - x(t)^2} = \sqrt{2} \cos \left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4} \right), \quad t \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right).$$

Esercizio A1. [punti 6] Data l'equazione

$$g(x, y) = x^2y + xy^2 + 5(y - 1) = 0,$$

- (a) verificare che essa definisce implicitamente $y = f(x)$ nell'intorno di $(0, 1)$,
- (b) determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 in $x_0 = 0$ della funzione f .

Esercizio A2. [punti 6] Sia ω la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \left(\frac{5}{x-2} + \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} + y \sin(\pi y^2) \right) dy.$$

- (a) Verificare che ω è esatta in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 2\} \setminus \{(0, 0)\}$, e determinare una primitiva [o funzione potenziale] di ω .
- (b) Calcolare $\int_{\gamma} \omega$, dove $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \in [-2\pi, 0]$.

Esercizio A3. [punti 6] Calcolare $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$, dove

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 1\},$$

orientata nel verso della normale esterna alla sfera, e

$$\vec{F}(x, y, z) = -x^3 \vec{i} + z \vec{j} + 3x^2 z \vec{k}.$$

Esercizio A4. [punti 6] Sia g l'estensione pari in $[-\pi, \pi]$ della funzione che in $[0, \pi]$ vale $1 - 2x$. Sia f l'estensione 2π -periodica di g .

- (a) Tracciare (in piccolo) il grafico di f nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.
- (b) Determinare i coefficienti di Fourier di f .
- (c) Studiare la convergenza della serie di Fourier di f (cioè, se converge, a che cosa converge, e per quale teorema).

Esercizio A5. [punti 6] Data l'equazione differenziale

$$u'' = \frac{(u')^2 - u^2}{2u}, \tag{E}$$

determinare i punti di equilibrio, e tracciare il diagramma di fase. Determinare la soluzione di (E) che soddisfa le condizioni iniziali $u(0) = 1$, $u'(0) = 1$.

Esercizio A1. [punti 6] Data l'equazione

$$g(x, y) = x^2y + xy^2 + 5(y - 1) = 0,$$

- (a) verificare che essa definisce implicitamente $y = f(x)$ nell'intorno di $(0, 1)$,
 (b) determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 in $x_0 = 0$ della funzione f .

Svolgimento: Osserviamo che $g(0, 1) = 0$ e $g_x(x, y) = 2xy + y^2$, $g_y(x, y) = x^2 + 2xy + 5$, e quindi $g_x(0, 1) = 1$, $g_y(0, 1) = 5 \neq 0$. Per il teorema del Dini, $g(x, y) = 0$ definisce, in un intorno di $(0, 1)$, un'unica funzione $y = f(x)$, che risulta essere di classe C^∞ . Inoltre, $g(x, f(x)) = 0$, per ogni x in un intorno di $x_0 = 0$, per cui derivando rispetto ad x si ottiene

$$0 = g_x(x, f(x)) + g_y(x, f(x))f'(x) \quad (*)$$

e sostituendo $x = 0$, $f(0) = 1$, si ottiene

$$0 = 1 + 5f'(0) \iff f'(0) = -\frac{1}{5}.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} g_{xx}(x, y) = 2y &\implies g_{xx}(0, 1) = 2, \\ g_{xy}(x, y) = 2x + 2y &\implies g_{xy}(0, 1) = 2, \\ g_{yy}(x, y) = 2x &\implies g_{yy}(0, 1) = 0. \end{aligned}$$

Derivando (*) di nuovo, si ottiene

$$0 = g_{xx}(x, f(x)) + 2g_{xy}(x, y)f'(x) + g_{yy}(x, f(x))f'(x)^2 + g_y(x, f(x))f''(x)$$

e sostituendo $x = 0$, $f(0) = 1$, $f'(0) = -\frac{1}{5}$, si ottiene

$$0 = 2 - \frac{4}{5} + 5f''(0) \iff f''(0) = -\frac{6}{25}.$$

Ma allora il polinomio richiesto è

$$T_2(x) = 1 - \frac{1}{5}x - \frac{3}{25}x^2.$$

Esercizio A2. [punti 6] Sia ω la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \left(\frac{5}{x-2} + \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} + y \sin(\pi y^2) \right) dy.$$

(a) Verificare che ω è esatta in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < 2\} \setminus \{(0, 0)\}$, e determinare una primitiva [o funzione potenziale] di ω .

(b) Calcolare $\int_{\gamma} \omega$, dove $\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$, $t \in [-2\pi, 0]$.

Svolgimento: Poiché

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{5}{x-2} + \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \right) = \frac{-2xy}{3(x^2+y^2)^{4/3}} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} + y \sin(\pi y^2) \right),$$

ω è chiusa in D , che non è semplicemente connesso. Per verificare se ω è esatta in D , cerchiamo, allora, una funzione potenziale. Si ha $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{5}{x-2} + \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$, cioè

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \int \left(\frac{5}{x-2} + \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} \right) dx + \varphi(y) = 5 \log(2-x) + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+y^2)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} + \varphi(y) \\ &= 5 \log(2-x) + \frac{3}{4} (x^2+y^2)^{2/3} + \varphi(y), \end{aligned}$$

e deve essere

$$\frac{y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} + y \sin(\pi y^2) = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}} + \varphi'(y),$$

per cui $\varphi'(y) = y \sin(\pi y^2)$, cioè $\varphi(y) = \int y \sin(\pi y^2) dy = -\frac{1}{2\pi} \cos(\pi y^2) + C$, e possiamo scegliere $C = 0$. Quindi

$$U(x, y) = \frac{3}{4} (x^2+y^2)^{2/3} + 5 \log(2-x) - \frac{1}{2\pi} \cos(\pi y^2),$$

e ω è esatta. Allora,

$$\int_{\gamma} \omega = U(1, 0) - U(e^{-2\pi}, 0) = \frac{3}{4} (1 - e^{-8\pi/3}) - 5 \log(2 - e^{-2\pi}).$$

Esercizio A3. [punti 6] Calcolare $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$, dove

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 1\},$$

orientata nel verso della normale esterna alla sfera, e

$$\vec{F}(x, y, z) = -x^3 \vec{i} + z \vec{j} + 3x^2 z \vec{k}.$$

Svolgimento: Sia $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq 1\}$, per cui $\partial D = S \cup S'$, dove

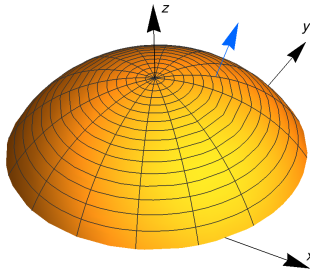


Figura 1: Grafico della superficie orientata S

$S' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 3, z = 1\}$. Una parametrizzazione di S' è $\Phi(x, y) = (x, y, 1)$, $(x, y) \in A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}$, il cui vettore normale è $\Phi_x \wedge \Phi_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}$.

Dal teorema della divergenza si ha $\iiint_D \operatorname{div} \vec{F} dx dy dz = \int_S \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma + \int_{S'} \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma$, dove $\vec{\nu}$ è il versore normale esterno rispetto a D . Poiché $\operatorname{div} \vec{F} = -3x^2 + 3x^2 = 0$, si ha

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma &= \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} - \int_{S'} \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma = \iint_A \vec{F} \circ \Phi \cdot \Phi_x \wedge \Phi_y dx dy \\ &= \iint_A 3x^2 dx dy \stackrel{(a)}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} 3\rho^2 \cos^2 \vartheta \rho d\rho d\vartheta \\ &= \left[\frac{3\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\vartheta}{2} d\vartheta = \frac{27}{4} \pi, \end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambio di coordinate $x = \rho \cos \vartheta$, $y = \rho \sin \vartheta$.

Esercizio A4. [punti 6] Sia g l'estensione pari in $[-\pi, \pi]$ della funzione che in $[0, \pi]$ vale $1 - 2x$. Sia f l'estensione 2π -periodica di g .

(a) Tracciare (in piccolo) il grafico di f nell'intervallo $[-3\pi, 3\pi]$.

(b) Determinare i coefficienti di Fourier di f .

(c) Studiare la convergenza della serie di Fourier di f (cioè, se converge, a che cosa converge, e per quale teorema).

Svolgimento: Poiché f è pari, i coefficienti di Fourier b_k sono nulli. Per quanto riguarda il

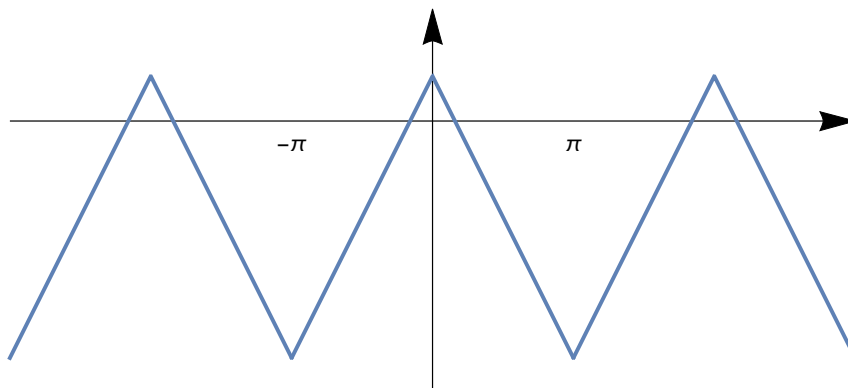


Figura 2: Grafico della funzione f

coefficiente a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - 2x) dx = \frac{2}{\pi} [x - x^2]_0^{\pi} = 2(1 - \pi),$$

e per $k \geq 1$ si ottiene:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - 2x) \cos kx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[(1 - 2x) \frac{\sin kx}{k} \right]_0^{\pi} + \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin kx}{k} dx = \frac{4}{\pi} \left[-\frac{\cos kx}{k^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{4}{k^2 \pi} (1 - \cos k\pi) = \begin{cases} \frac{8}{(2n-1)^2 \pi}, & k = 2n - 1, \\ 0, & k = 2n. \end{cases} \end{aligned}$$

Poiché, per ogni $x \in \mathbb{R}$, f è continua e soddisfa tutte le ipotesi del teorema di Dirichlet, concludiamo che la serie di Fourier di f converge a $f(x)$, cioè

$$f(x) = 1 - \pi + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx = 1 - \pi + \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)x.$$

Esercizio A5. [punti 6] Data l'equazione differenziale

$$u'' = \frac{(u')^2 - u^2}{2u}, \quad (E)$$

determinare i punti di equilibrio, e tracciare il diagramma di fase. Determinare la soluzione di (E) che soddisfa le condizioni iniziali $u(0) = 1$, $u'(0) = 1$.

Svolgimento: L'equazione differenziale è della forma $u'' = f(u, u')$, con $f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{2x}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$. I punti di equilibrio nel piano delle fasi sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} u' = 0 \\ u'' = f(u, u') = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ f(x, 0) = 0 \end{cases} \iff \nexists.$$

Le traiettorie di fase sono soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{f(x, y(x))}{y(x)} = \frac{y(x)^2 - x^2}{2xy(x)} \iff 2y(x)y'(x) = \frac{y(x)^2}{x} - x.$$

Introducendo la variabile $v(x) := y(x)^2$, l'equazione diventa

$$v'(x) = 2y(x)y'(x) = \frac{y(x)^2}{x} - x = \frac{v(x)}{x} - x,$$

che è un'equazione lineare. La soluzione dell'equazione omogenea associata è $\log |v(x)| = \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} = \log |x| + k \iff v_{om}(x) = Cx$. Una soluzione particolare dell'equazione lineare si ottiene con il metodo di variazione delle costanti, ponendo $v_p(x) = C(x)x$, per cui $C'(x)x + C(x) = C(x) - x \iff C'(x) = -1$, e integrando si ottiene $C(x) = -x \implies y(x)^2 = v_{gen}(x) = v_{om}(x) + v_p(x) = Cx - x^2 \iff y^2 + x^2 = Cx \iff (x - \frac{C}{2})^2 + y^2 = \frac{C^2}{4}$, cioè le famiglie di grafici $y(x) = \pm \sqrt{Cx - x^2}$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per $C > 0$, $\text{dom } y_C = [0, C]$; per $C < 0$, $\text{dom } y_C = [-C, 0]$. Il diagramma di fase è riportato in figura 3, per $C \in \{-4, -3, \dots, 4\}$.

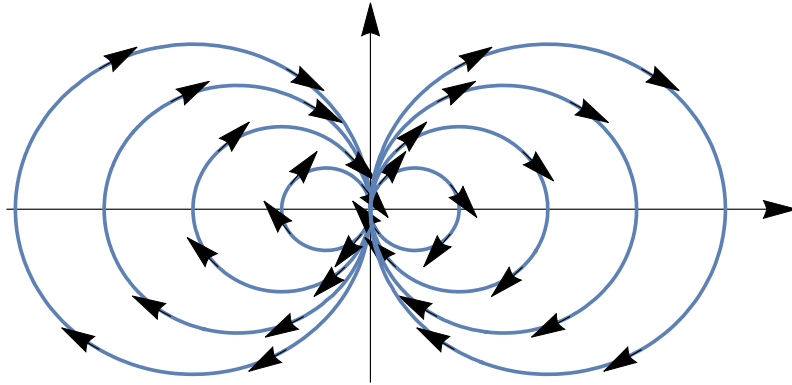


Figura 3: Diagramma di fase

Per determinare la soluzione del problema di Cauchy proposto, imponiamo la condizione iniziale $y(1) = 1$, ottenendo $C = 2$, per cui (una porzione del)la traiettoria di fase cercata è

$$y(x) = \sqrt{2x - x^2}, \quad \forall x \in (0, 2).$$

Ricordando che $(x, y) = (u, u')$, si ottiene l'equazione differenziale $u' = \sqrt{2u - u^2}$, che ha soluzione $t + c = \int \frac{du}{\sqrt{1 - (u-1)^2}} = \arcsin(u - 1) \iff u = 1 + \sin(t + c)$. Usando la condizione iniziale, si ha $0 = c$, per cui

$$u(t) = 1 + \sin t, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

CORSO DI STUDI IN FISICA – CALCOLO 2 (8/6/2021)

Esercizio A1. [punti 6] Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità di

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \log(x^2 + y^2) + x^3 y + 2y & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Determinare l'eventuale equazione del piano tangente al grafico nei punti $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

Esercizio A2. [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{4y}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \exp\left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right) dx dy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 0\}$.

Esercizio A3. [punti 6] Sia data la forma differenziale

$$\omega(x, y) = (\sin(2x) + e^{2y}) dx + (\cos y + 2xe^{2y}) dy.$$

(a) Dire se ω è chiusa e/o esatta in $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcolare $\int_\gamma \omega$, dove $\gamma(t) = 2e^t \vec{i} + (t+2)\vec{j}$, $t \in [0, 1]$.

Esercizio A4. [punti 6] Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1-x^2)^n}{n!} + \frac{2}{x^n} \right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

(a) determinare l'insieme di convergenza puntuale,

(b) determinare la somma della serie.

Esercizio A5. [punti 6] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

CORSO DI STUDI IN FISICA – CALCOLO 2 (8/6/2021)

Esercizio A1. [punti 6] Studiare continuità, esistenza delle derivate parziali e differenziabilità di

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \log(x^2 + y^2) + x^3 y + 2y & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Determinare l'eventuale equazione del piano tangente al grafico nei punti $(0, 0)$ e $(1, 0)$.

Svolgimento: (a) La continuità di f in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ segue da teoremi generali sulle funzioni continue. In $(0, 0)$ si ha

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x^2 \log(x^2 + y^2) + x^3 y + 2y = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x^2 \log(x^2 + y^2) = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho^2 \log \varrho^2 \cos^2 \vartheta = 0,$$

perché $\varrho^2 \log \varrho^2 \rightarrow 0$ e $|\cos^2 \vartheta| \leq 1$. Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcoliamo le derivate parziali in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Si ha

$$f_x(x, y) = 2x \log(x^2 + y^2) + \frac{2x^3}{x^2 + y^2} + 3x^2 y$$

$$f_y(x, y) = \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} + x^3 + 2.$$

Quindi le derivate parziali sono anche continue in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Calcoliamole in $(0, 0)$. Si ha

$$f_x(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} t \log(t^2) = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{t} = 2.$$

(c) Infine, f è differenziabile in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, perché le derivate parziali sono continue in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. In $(0, 0)$ si ha

$$\begin{aligned} \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - f_y(0, 0)y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 \log(x^2 + y^2) + x^3 y + 2y - 2y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 \log(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{1/2}} + \frac{x^3 y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \\ &= \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varrho \log(\varrho^2) \cos^2 \vartheta = 0, \end{aligned}$$

perché $\varrho \log(\varrho^2) \rightarrow 0$ e $|\cos^2 \vartheta| \leq 1$. Quindi f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$.

(d) Il piano tangente al grafico di f in $(0, 0)$ ha equazione $z = f(0, 0) + f_x(0, 0)x + f_y(0, 0)y = 2y$. Mentre quello in $(1, 0)$ ha equazione $z = f(1, 0) + f_x(1, 0)(x - 1) + f_y(1, 0)y = 2(x - 1) + 3y = 2x + 3y - 2$.

Esercizio A2. [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D \frac{4y}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \exp\left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right) dx dy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq y \leq 0\}$.

Svolgimento: Si ha

$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{4y}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \exp\left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right) dx dy &\stackrel{(a)}{=} \iint_{D_{\varrho\vartheta}} \frac{4 \sin \vartheta}{\varrho^4} \exp\left(\frac{2 \cos \vartheta}{\varrho}\right) \varrho d\varrho d\vartheta \\
 &= \int_1^2 \frac{4}{\varrho^3} \left(\int_{\pi}^{5\pi/4} \sin \vartheta \exp\left(\frac{2 \cos \vartheta}{\varrho}\right) d\vartheta \right) d\varrho \\
 &\stackrel{(b)}{=} - \int_1^2 \frac{2}{\varrho^2} \left(\int_{-2/\varrho}^{-\sqrt{2}/\varrho} e^z dz \right) d\varrho = - \int_1^2 \frac{2}{\varrho^2} \left[e^z \right]_{-2/\varrho}^{-\sqrt{2}/\varrho} d\varrho \\
 &= - \int_1^2 \frac{2}{\varrho^2} (e^{-\sqrt{2}/\varrho} - e^{-2/\varrho}) d\varrho \stackrel{(c)}{=} -2 \int_{-1}^{-1/2} (e^{\sqrt{2}t} - e^{2t}) dt \\
 &= -2 \left[\frac{e^{\sqrt{2}t}}{\sqrt{2}} - \frac{e^{2t}}{2} \right]_{-1}^{-1/2} = e^{-1} - e^{-2} - \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}/2} + \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}},
 \end{aligned}$$

dove si è usato: in (a) il cambiamento di variabili $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$, e $D_{\varrho\vartheta} = \{(\varrho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \varrho \in [1, 2], \vartheta \in [\pi, \frac{5\pi}{4}]\}$; in (b) il cambiamento di variabili $z = \frac{2 \cos \vartheta}{\varrho} \implies dz = -\frac{2 \sin \vartheta}{\varrho} d\vartheta$; in (c) il cambiamento di variabili $t = -\frac{1}{\varrho} \implies dt = \frac{1}{\varrho^2} d\varrho$.

Esercizio A3. [punti 6] Sia data la forma differenziale

$$\omega(x, y) = (\sin(2x) + e^{2y}) dx + (\cos y + 2xe^{2y}) dy.$$

(a) Dire se ω è chiusa e/o esatta in $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcolare $\int_{\gamma} \omega$, dove $\gamma(t) = 2e^t \vec{i} + (t+2)\vec{j}$, $t \in [0, 1]$.

Svolgimento: Poiché $\frac{\partial}{\partial y} (\sin(2x) + e^{2y}) = 2e^{2y} = \frac{\partial}{\partial x} (\cos y + 2xe^{2y})$, ne segue che ω è chiusa in $D = \mathbb{R}^2$, che è convesso, e quindi semplicemente connesso. Quindi ω è esatta in D , per cui l'integrale proposto non dipende dal cammino, ma solo dagli estremi. Allora usiamo $\tilde{\gamma} := \gamma_1 \cup \gamma_2$, dove $\gamma_1(t) = 2t\vec{i} + 2\vec{j}$, $t \in [1, e]$, $\gamma_2(t) = 2e\vec{i} + t\vec{j}$, $t \in [2, 3]$, ottenendo

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \omega &= \int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_1^e (\sin(4t) + e^4) 2dt + \int_2^3 (\cos t + 4e^{1+2t}) dt \\
 &= 2 \left[\frac{-\cos(4t)}{4} + e^4 t \right]_1^e + \left[\sin t + 2e^{1+2t} \right]_2^3 = \frac{1}{2} (\cos 4 - \cos 4e) + \sin 3 - \sin 2 + 2e^7 - 2e^4.
 \end{aligned}$$

Esercizio A4. [punti 6] Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1-x^2)^n}{n!} + \frac{2}{x^n} \right), \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

(a) determinare l'insieme di convergenza puntuale,

(b) determinare la somma della serie.

Svolgimento: La serie proposta si può considerare come somma di due serie, che studiamo separatamente.

Per quanto riguarda la prima serie, posto $y = \varphi(x) := 1 - x^2$, essa diventa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$, che è una serie di potenze, con raggio di convergenza $+\infty$, per cui la serie converge puntualmente per ogni $y \in \mathbb{R}$, e quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Per quanto riguarda la seconda serie, posto $y = \varphi(x) = \frac{1}{x}$, essa diventa $\sum_{n=1}^{\infty} 2y^n$, che è una serie di potenze, con raggio di convergenza 1, per cui la serie converge puntualmente per ogni $y \in (-1, 1)$, e quindi per ogni $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Allora la serie data converge puntualmente per ogni $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Infine, poiché $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = e^y - 1$, e $\sum_{n=1}^{\infty} 2y^n = 2(\frac{1}{1-y} - 1) = \frac{2y}{1-y}$, si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(1-x^2)^n}{n!} + \frac{2}{x^n} \right) = e^{1-x^2} - 1 + \frac{2}{x-1} = e^{1-x^2} - \frac{x-3}{x-1}.$$

Esercizio A5. [punti 6] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento: Cerchiamo gli autovalori di A :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 = 0, \text{ da cui si ottiene la soluzione } \lambda_1 = 2$$

(tripla).

Autovettori per $\lambda_1 = 2$:

$$0 = (A - 2I)\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \iff v_3 = 0.$$

Poiché ci sono solo 2 autovettori indipendenti, occorre cercare gli autovettori generalizzati:

$$0 = (A - 2I)^2 \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \iff \forall \vec{v},$$

e quindi $\vec{v}_3 = \vec{e}_3$, e $\vec{v}_2 = (A - 2I)\vec{v}_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, e possiamo prendere $v_1 = \vec{e}_1$.

Da $y_0 = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + c_3 \vec{v}_3$ si ricava

$$\begin{cases} 1 = y_1(0) = c_1 + c_2 \\ 1 = y_2(0) = -c_2 \\ 1 = y_3(0) = c_3 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = 1. \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At} y_0 = c_1 e^{At} \vec{v}_1 + c_2 e^{At} \vec{v}_2 + c_3 e^{At} \vec{v}_3 = c_1 e^{2t} \vec{v}_1 + c_2 e^{2t} \vec{v}_2 + c_3 e^{2t} (I + (A - 2I)t) \vec{v}_3 \\ &= c_1 e^{2t} \vec{v}_1 + (c_2 + c_3 t) e^{2t} \vec{v}_2 + c_3 e^{2t} \vec{v}_3 = 2e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (t-1)e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (1+t)e^{2t} \\ y_2(t) &= (1-t)e^{2t} \\ y_3(t) &= e^{2t}. \end{aligned}$$

Esercizio A1. [punti 6] Data l'equazione

$$g(x, y) = x^3 - 5x^2y + y^3 - 8 = 0,$$

- (a) verificare che essa definisce implicitamente $y = f(x)$ nell'intorno di $(0, 2)$,
- (b) determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 in $x_0 = 0$ della funzione f ,
- (c) calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x^2}$.

Esercizio A2. [punti 6] Sia data la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \left(5 \sin(\pi x) + \log \frac{y}{x} \right) dx + \left(-5 \cos(\pi y) + \frac{x}{y} \right) dy.$$

- (a) Dire se ω è chiusa e/o esatta in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$.
- (b) Calcolare $\int_{\gamma} \omega$, dove $\gamma(t) = (t + 2)\vec{i} + (t^2 + 2)\vec{j}$, $t \in [0, 1]$.

Esercizio A3. [punti 6] Calcolare $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$, dove S è la superficie laterale del cilindro

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 0\},$$

orientata nel verso della normale entrante, e

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^3 - x^2)\vec{i} + (2xy + 3yz^2)\vec{j} + x^2y\vec{k}.$$

Esercizio A4. [punti 6] Data la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \pi/2, \\ 2, & |x| = \pi/2 \\ 4, & \pi/2 < |x| \leq \pi, \end{cases}$$

sia f il suo prolungamento 2π -periodico.

- (a) Tracciare (in piccolo) il grafico di f ,
- (b) determinare i coefficienti di Fourier di f ,
- (c) studiare la convergenza della serie di Fourier di f (cioè, se converge, a che cosa converge, e per quale teorema).

Esercizio A5. [punti 6] Determinare gli eventuali punti di equilibrio, e tracciare il diagramma di fase per la seguente equazione differenziale

$$u'' = \frac{u' - (u')^2}{u}.$$

Determinare, inoltre, la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $u(0) = 1$, $u'(0) = 1$.

Esercizio A1. [punti 6] Data l'equazione

$$g(x, y) = x^3 - 5x^2y + y^3 - 8 = 0,$$

(a) verificare che essa definisce implicitamente $y = f(x)$ nell'intorno di $(0, 2)$,

(b) determinare il polinomio di Taylor di ordine 2 in $x_0 = 0$ della funzione f ,

(c) calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x^2}$.

Svolgimento: Osserviamo che $g(0, 2) = 0$ e $g_x(x, y) = 3x^2 - 10xy$, $g_y(x, y) = -5x^2 + 3y^2$, e quindi $g_x(0, 2) = 0$, $g_y(0, 2) = 12 \neq 0$. Per il teorema del Dini, $g(x, y) = 0$ definisce, in un intorno di $(0, 2)$, un'unica funzione $y = f(x)$, che risulta essere di classe C^∞ . Inoltre, $g(x, f(x)) = 0$, per ogni x in un intorno di $x_0 = 0$, per cui derivando rispetto ad x si ottiene

$$0 = g_x(x, f(x)) + g_y(x, f(x))f'(x) \quad (*)$$

e sostituendo $x = 0$, $f(0) = 2$, si ottiene

$$0 = 12f'(0) \iff f'(0) = 0.$$

Osserviamo che

$$g_{xx}(x, y) = 6x - 10y \implies g_{xx}(0, 2) = -20,$$

$$g_{xy}(x, y) = -10x \implies g_{xy}(0, 2) = 0,$$

$$g_{yy}(x, y) = 6y \implies g_{yy}(0, 2) = 12.$$

Derivando (*) di nuovo, si ottiene

$$0 = g_{xx}(x, f(x)) + 2g_{xy}(x, y)f'(x) + g_{yy}(x, f(x))f'(x)^2 + g_y(x, f(x))f''(x)$$

e sostituendo $x = 0$, $f(0) = 2$, $f'(0) = 0$, si ottiene

$$0 = -20 + 12f''(0) \iff f''(0) = \frac{5}{3}.$$

Ma allora il polinomio richiesto è

$$T_2(x) = 2 + \frac{5}{6}x^2.$$

Infine, il limite è

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{5}{6}x^2(1 + o(1))}{x^2} = \frac{5}{6}.$$

Esercizio A2. [punti 6] Sia data la forma differenziale

$$\omega(x, y) = \left(5 \sin(\pi x) + \log \frac{y}{x} \right) dx + \left(-5 \cos(\pi y) + \frac{x}{y} \right) dy.$$

(a) Dire se ω è chiusa e/o esatta in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\}$.

(b) Calcolare $\int_{\gamma} \omega$, dove $\gamma(t) = (t+2)\vec{i} + (t^2+2)\vec{j}$, $t \in [0, 1]$.

Svolgimento: Poiché

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(5 \sin(\pi x) + \log \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-5 \cos(\pi y) + \frac{x}{y} \right),$$

ne segue che ω è chiusa in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$, che è convesso, e quindi semplicemente connesso. Quindi ω è esatta in D , per cui l'integrale proposto non dipende dal cammino, ma solo dagli estremi. Allora usiamo

$$\tilde{\gamma}(t) := t\vec{i} + t\vec{j}, \quad t \in [2, 3],$$

e otteniamo

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\tilde{\gamma}} \omega = \int_2^3 (5 \sin(\pi t) - 5 \cos(\pi t) + 1) dt = \left[\frac{-5 \cos(\pi t)}{\pi} - \frac{5 \sin(\pi t)}{\pi} + t \right]_2^3 = 1 + \frac{10}{\pi}.$$

Esercizio A3. [punti 6] Calcolare $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$, dove S è la superficie laterale del cilindro

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1, -1 \leq y \leq 0\},$$

orientata nel verso della normale entrante, e

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^3 - x^2)\vec{i} + (2xy + 3yz^2)\vec{j} + x^2 y \vec{k}.$$

Svolgimento: Usando la definizione. Una parametrizzazione di S è $\Phi(\vartheta, y) = (\cos \vartheta, y, \sin \vartheta)$, $(\vartheta, y) \in A := [0, 2\pi] \times [-1, 0]$, il cui vettore normale è

$$\Phi_{\vartheta} \wedge \Phi_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\cos \vartheta \vec{i} - \sin \vartheta \vec{k},$$

che è entrante in T . Allora, si ha

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma &= \int_A \vec{F} \circ \Phi \cdot \Phi_{\vartheta} \wedge \Phi_y d\vartheta dy = \iint_A (-\cos \vartheta (\cos^3 \vartheta - \cos^2 \vartheta) - y \cos^2 \vartheta \sin \vartheta) d\vartheta dy \\ &= \int_{-1}^0 dy \int_0^{2\pi} \left((1 - \sin^2 \vartheta) \cos \vartheta - \left(\frac{1 + \cos 2\vartheta}{2} \right)^2 \right) d\vartheta + \int_{-1}^0 y dy \int_0^{2\pi} \cos^2 \vartheta d(\cos \vartheta) \\ &= \left[\sin \vartheta - \frac{\sin^3 \vartheta}{3} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + 2 \cos 2\vartheta + \cos^2 2\vartheta) d\vartheta + \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-1}^0 \left[\frac{\cos^3 \vartheta}{3} \right]_0^{2\pi} \\ &= -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 4\vartheta}{2} d\vartheta = -\frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

Usando il teorema della divergenza. Si ha

$$\partial T = S \cup S_0 \cup S_{-1},$$

dove $S_\ell = \{(x, \ell, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 \leq 1\}$, $\ell \in \{-1, 0\}$. Una parametrizzazione di S_ℓ è

$$\Phi^{(\ell)}(x, z) = (x, \ell, z), \quad (x, z) \in A := \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + z^2 \leq 1\},$$

il cui vettore normale è

$$\Phi_x^{(\ell)} \wedge \Phi_z^{(\ell)} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{j}.$$

Dal teorema della divergenza si ha

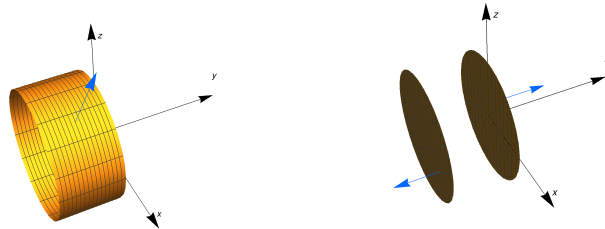


Figura 1: Superfici S (a sinistra), S_0 , S_{-1} (a destra) orientate dalla normale esterna a T

$$\iiint_T \operatorname{div} \vec{F} \, dxdydz = \int_S \vec{F} \cdot \vec{\nu}_e \, d\sigma + \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_e \, d\sigma + \int_{S_{-1}} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_e \, d\sigma,$$

dove $\vec{\nu}_e$ è il versore normale esterno rispetto a T . Poiché $\operatorname{div} \vec{F} = 3x^2 + 3z^2$, si ha

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma &= - \int_S \vec{F} \cdot \vec{\nu}_e \, d\sigma = - \iiint_T \operatorname{div} \vec{F} + \int_{S_0} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_e \, d\sigma + \int_{S_{-1}} \vec{F} \cdot \vec{\nu}_e \, d\sigma \\ &\stackrel{(a)}{=} -3 \int_{-1}^0 dy \iint_A (x^2 + z^2) \, dxdz - \iint_A \vec{F} \circ \Phi^{(0)} \cdot \Phi_x^{(0)} \wedge \Phi_z^{(0)} \, dxdz \\ &\quad + \iint_A \vec{F} \circ \Phi^{(-1)} \cdot \Phi_x^{(-1)} \wedge \Phi_z^{(-1)} \, dxdz \\ &\stackrel{(b)}{=} -3 \iint_A (x^2 + z^2) \, dxdz - \iint_A (2xy + 3yz^2)|_{y=-1} \, dxdz \\ &\stackrel{(c)}{=} -3 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \varrho^2 \, \varrho d\varrho d\vartheta + \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2\varrho \cos \vartheta + 3\varrho^2 \sin^2 \vartheta) \, \varrho d\varrho d\vartheta \\ &= -3 \cdot 2\pi \left[\frac{\varrho^4}{4} \right]_0^1 + 3 \left[\frac{\varrho^4}{4} \right]_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\vartheta}{2} \, d\vartheta = -\frac{3}{4}\pi, \end{aligned}$$

dove si è usato in (a) il fatto che l'orientazione indotta dalla parametrizzazione $\Phi^{(0)}$ è interna a T , mentre quella indotta da $\Phi^{(-1)}$ è esterna, in (b) il fatto che $F \circ \Phi^{(0)} \cdot \Phi_x^{(0)} \wedge \Phi_z^{(0)} = (2xy + 3yz^2)|_{y=0} = 0$, e in (c) il cambio di coordinate $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$.

Esercizio A4. [punti 6] Data la funzione

$$g(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \pi/2, \\ 2, & |x| = \pi/2 \\ 4, & \pi/2 < |x| \leq \pi, \end{cases}$$

sia f il suo prolungamento 2π -periodico.

(a) Tracciare (in piccolo) il grafico di f ,

(b) determinare i coefficienti di Fourier di f ,

(c) studiare la convergenza della serie di Fourier di f (cioè, se converge, a che cosa converge, e per quale teorema).

Svolgimento: Poiché f è pari, i coefficienti di Fourier b_k sono nulli. Per quanto riguarda il coefficiente a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} 4 dx = 5,$$

e per $k \geq 1$ si ottiene:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos kx dx + \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} 4 \cos kx dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin kx}{k} \right]_0^{\pi/2} + \frac{8}{\pi} \left[\frac{\sin kx}{k} \right]_{\pi/2}^{\pi} = \frac{2}{k\pi} \sin \left(k \frac{\pi}{2} \right) - \frac{8}{k\pi} \sin \left(k \frac{\pi}{2} \right) \\ &= -\frac{6}{k\pi} \sin \left(k \frac{\pi}{2} \right) = \begin{cases} (-1)^n \frac{6}{(2n-1)\pi}, & k = 2n - 1, \\ 0, & k = 2n. \end{cases} \end{aligned}$$

Poiché, per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k-1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}$, f è continua e soddisfa tutte le ipotesi del

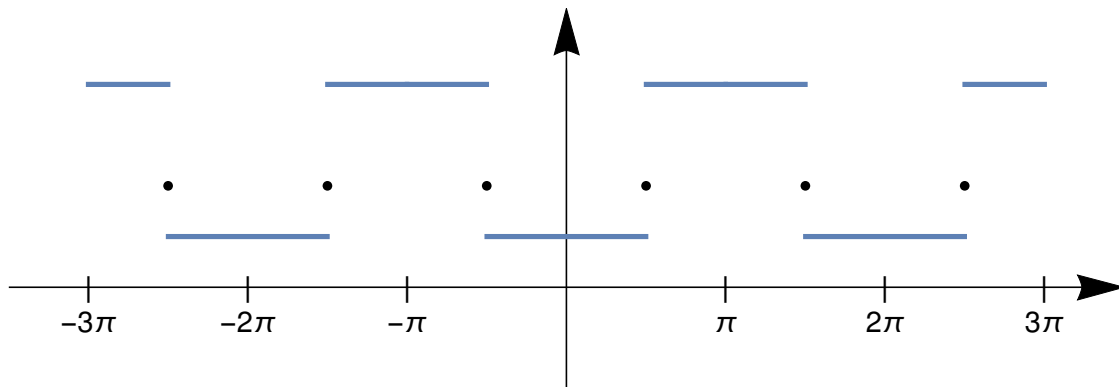


Figura 2: Grafico di f

teorema di Dirichlet, concludiamo che la serie di Fourier di f converge a $f(x)$, cioè

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx = \frac{5}{2} + \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1} \cos(2n-1)x.$$

Se $x = (2k-1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, la serie di Fourier di f converge a $\frac{5}{2} = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$.

Esercizio A5. [punti 6] Determinare gli eventuali punti di equilibrio, e tracciare il diagramma di fase per la seguente equazione differenziale

$$u'' = \frac{u' - (u')^2}{u}.$$

Determinare, inoltre, la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $u(0) = 1$, $u'(0) = 1$.

Svolgimento: L'equazione differenziale è della forma $u'' = f(u, u')$, con $f(x, y) = \frac{y-y^2}{x}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$. I punti di equilibrio nel piano delle fasi sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} u' = 0 \\ u'' = f(u, u') = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ f(x, 0) = 0 \end{cases} \iff y = 0.$$

Le traiettorie di fase sono soluzioni dell'equazione differenziale $y(x)y'(x) = f(x, y(x)) = \frac{y(x)-y(x)^2}{x}$. Integrando si ottiene $\log |y - 1| = -\log |x| + c \iff y = \frac{C}{x} + 1$, $C \in \mathbb{R}$. Il diagramma di fase è riportato in figura 3, per $C \in \{-4, -3, \dots, 4\}$.

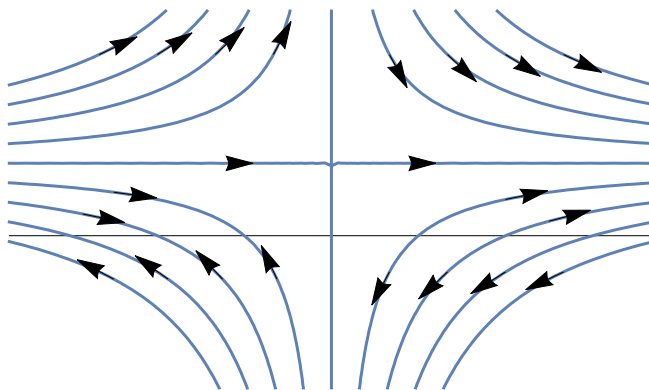


Figura 3: Diagramma di fase

Per determinare la soluzione del problema di Cauchy proposto, imponiamo la condizione iniziale $y(1) = 1$, ottenendo $C = 0$, per cui $y(x) = 1$, $x \neq 0$. Ricordando che $(x, y) = (u, u')$, si ottiene l'equazione differenziale $u' = 1$, e bisogna risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 1 \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

La soluzione è $u = t + c$, e imponendo la condizione iniziale si ha $c = 1$, per cui $u(t) = t + 1$, $t > -1$.

CORSO DI STUDI IN FISICA – CALCOLO 2 (6/9/2021)

Esercizio A1. [punti 6] Data la seguente funzione

$$f(x, y) = x^2y + xy^2 - xy$$

- (a) determinarne i punti stazionari e la loro natura,
- (b) determinare massimo e minimo di f in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Esercizio A2. [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D (x^2y + 2(x - y)^2) \, dx dy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x + y \leq 0\}$.

Esercizio A3. [punti 6] Calcolare $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma$, dove S è la superficie laterale del paraboloide

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\},$$

orientata nel verso della normale esterna, e

$$\vec{F}(x, y, z) = -x^3\vec{i} + 2y\vec{j} + 3x^2z\vec{k}.$$

Esercizio A4. [punti 6] Data la successione

$$f_n(x) := (2n^2x^2 - 7nx + 5)e^{-nx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

- (a) tracciare un grafico qualitativo di f_n , per un generico valore di n ,
- (b) determinare l'insieme di convergenza puntuale e $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$,
- (c) verificare se f_n converge uniformemente in $[1, 2]$,
- (d) determinare il generico intervallo di convergenza uniforme.

Esercizio A5. [punti 6] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

CORSO DI STUDI IN FISICA – CALCOLO 2 (6/9/2021)

Esercizio A1. [punti 6] Data la seguente funzione

$$f(x, y) = x^2y + xy^2 - xy$$

- (a) determinarne i punti stazionari e la loro natura,
 (b) determinare massimo e minimo di f in $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Svolgimento: (a) I punti stazionari sono soluzioni di

$$\begin{aligned} & \begin{cases} f_x(x, y) = 2xy + y^2 - y = y(2x + y - 1) = 0 \\ f_y(x, y) = x^2 + 2xy - x = x(x + 2y - 1) = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

che forniscono i punti $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (0, 1)$, $P_4 = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Poiché $H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y & 2x + 2y - 1 \\ 2x + 2y - 1 & 2x \end{pmatrix}$, si ha:

(a1) $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \implies \det H_f(0, 0) = -1 < 0$, e $(0, 0)$ è di sella,

(a2) $H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \implies \det H_f(1, 0) = -1 < 0$, e $(1, 0)$ è di sella,

(a3) $H_f(0, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies \det H_f(0, 1) = -1 < 0$, e $(0, 1)$ è di sella,

(a4) $H_f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \implies \det H_f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{9} > 0$ e $\text{Tr } H_f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{4}{3} > 0$, e $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ è di minimo.

(b) Poiché D è chiuso e limitato e f è continua su D , il teorema di Weierstrass ci assicura che f ha massimo e minimo su D . Come conseguenza del teorema di Fermat, cerchiamo i punti di massimo e minimo in tre insiemi:

(b1) tra i punti stazionari interni a D . In questo caso, $P_4 \in D^\circ$.

(b2) tra i punti interni a D in cui non esiste almeno una delle derivate parziali prime di f . In questo caso non ci sono.

(b3) tra i punti di frontiera di D . Determiniamo, allora, i punti di massimo e minimo di $f|_{\mathcal{F}D}$. Poiché $\mathcal{F}D$ consiste di tre segmenti di retta, parametrizziamoli separatamente.

La retta $x + y - 2 = 0$ interseca gli assi nei punti $P_5 = (2, 0)$ e $P_6 = (0, 2)$. Sul segmento P_1P_5 , $f(x, 0) = 0$. Sul segmento P_1P_6 , $f(0, y) = 0$. Sul segmento P_5P_6 , si ha $h(x) := f(x, 2 - x) = 2x - x^2$, $x \in [0, 2]$. Poiché $h'(x) = 2 - 2x = 0 \iff x = 1$, viene individuato il punto $P_7 = (1, 1)$.

(b4) Calcolando il valore di f su tutti i punti trovati, otteniamo $f(P_4) = -\frac{1}{27}$, $f(P_7) = 1$. Quindi $\min_D f = -\frac{1}{27}$ e $\max_D f = 1$.

Esercizio A2. [punti 6] Calcolare il seguente integrale

$$\iint_D (x^2 y + 2(x - y)^2) \, dx dy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x + y \leq 0\}$.

Svolgimento: Si ha

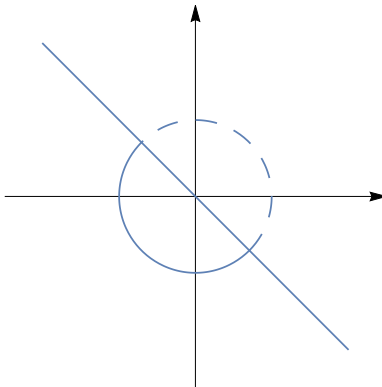


Figura 1: Dominio di integrazione

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 y + 2(x - y)^2) \, dx dy &\stackrel{(a)}{=} \iint_{D_{\varrho\vartheta}} (\varrho^3 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta + 2\varrho^2 (\cos \vartheta - \sin \vartheta)^2) \varrho d\varrho d\vartheta \\ &= -\left[\frac{\varrho^5}{5}\right]_0^1 \int_{3\pi/4}^{7\pi/4} \cos^2 \vartheta \, d(\cos \vartheta) + 2\left[\frac{\varrho^4}{4}\right]_0^1 \int_{3\pi/4}^{7\pi/4} (1 - \sin 2\vartheta) \, d\vartheta \\ &= -\frac{1}{5} \left[\frac{\cos^3 \vartheta}{3}\right]_{3\pi/4}^{7\pi/4} + \frac{1}{2} \left[\vartheta + \frac{\cos 2\vartheta}{2}\right]_{3\pi/4}^{7\pi/4} \\ &= \frac{1}{15} (\cos^3(3\pi/4) - \cos^3(7\pi/4)) + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} (\cos(7\pi/2) - \cos(3\pi/2)) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{15\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambiamento di variabili $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$, e $D_{\varrho\vartheta} = \{(\varrho, \vartheta) \in \mathbb{R}^2 : \varrho \in [0, 1], \vartheta \in [\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}]\}$.

Esercizio A3. [punti 6] Calcolare $\int_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$, dove S è la superficie laterale del paraboloide

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\},$$

orientata nel verso della normale esterna, e

$$\vec{F}(x, y, z) = -x^3 \vec{i} + 2y \vec{j} + 3x^2 z \vec{k}.$$

Svolgimento: Osserviamo che $\partial T = S \cup S'$, dove $S' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 3\}$.

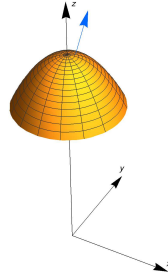


Figura 2: Superficie

Una parametrizzazione di S' è $\Phi(x, y) = (x, y, 3)$, $(x, y) \in A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, il

cui vettore normale è $\Phi_x \wedge \Phi_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}$.

Dal teorema della divergenza si ha $\iiint_D \operatorname{div} F dx dy dz = \int_S F \cdot \nu d\sigma + \int_{S'} F \cdot \nu d\sigma$, dove ν è il versore normale esterno rispetto a T . Poiché $\operatorname{div} F = -3x^2 + 2 + 3x^2 = 2$, si ha

$$\begin{aligned} \int_S \vec{F} \cdot \vec{\nu} d\sigma &= \iiint_D \operatorname{div} \vec{F} - \int_{S'} F \cdot \nu d\sigma = 2 \iiint_T dx dy dz + \iint_A \vec{F} \circ \Phi \cdot \Phi_x \wedge \Phi_y dy dz \\ &= 2 \iint_A \left(\int_3^{4-x^2-y^2} dz \right) dx dy + \iint_A 9x^2 dx dy \\ &\stackrel{(a)}{=} 2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - \varrho^2) \varrho d\varrho d\vartheta + 9 \int_0^{2\pi} \int_0^1 \varrho^2 \cos^2 \vartheta \varrho d\varrho d\vartheta \\ &= 4\pi \left[\frac{\varrho^2}{2} - \frac{\varrho^4}{4} \right]_0^1 + 9 \left[\frac{\varrho^4}{4} \right]_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2\vartheta}{2} d\vartheta = \pi + \frac{9\pi}{4} = \frac{13}{4}\pi, \end{aligned}$$

dove in (a) si è usato il cambio di coordinate $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$.

Esercizio A4. [punti 6] Data la successione

$$f_n(x) := (2n^2x^2 - 7nx + 5)e^{-nx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

- (a) tracciare un grafico qualitativo di f_n , per un generico valore di n ,
- (b) determinare l'insieme di convergenza puntuale e $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$,
- (c) verificare se f_n converge uniformemente in $[1, 2]$,
- (d) determinare il generico intervallo di convergenza uniforme.

Svolgimento: Osserviamo che

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} +\infty, & x < 0, \\ 5, & x = 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases}$$

e quindi la successione converge per ogni $x \in [0, +\infty)$, ma il suo limite f non è continuo in $x = 0$, per cui f_n non converge uniformemente in $[0, +\infty)$. Poiché

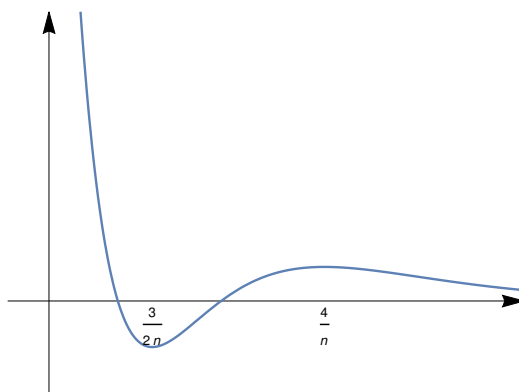


Figura 3: Grafico di f_n

$$f'_n(x) = -n(2n^2x^2 - 11nx + 12)e^{-nx} \geq 0 \iff x \in \left[\frac{3}{2n}, \frac{4}{n}\right],$$

e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$, otteniamo, per ogni $\delta > 0$, che $\sup_{x \geq \delta} |f_n(x) - f(x)| = f_n(\delta) \rightarrow 0$, per cui $f_n \rightrightarrows 0$ in $[\delta, +\infty)$, e in particolare in $[1, 2]$.

Esercizio A5. [punti 6] Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Svolgimento: Cerchiamo gli autovalori di A :

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & -1 \\ 1 & 3 - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(3 - \lambda)(2 - \lambda) + 2 - \lambda \\ &= (2 - \lambda)(4 - 4\lambda + \lambda^2) = (2 - \lambda)^3 = 0, \end{aligned}$$

da cui si ottiene la soluzione $\lambda_1 = 2$ (tripla).

Autovettori per $\lambda_1 = 2$:

$$0 = (A - 2I)\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \iff v_1 + v_2 + v_3 = 0.$$

Poiché si sono solo 2 autovettori indipendenti, occorre cercare gli autovettori generalizzati:

$$0 = (A - 2I)^2 \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \iff \forall \vec{v},$$

e quindi possiamo scegliere $\vec{v}_3 = \vec{e}_3$, e $\vec{v}_2 = (A - 2I)\vec{v}_3 = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2$, e possiamo prendere $\vec{v}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3$.

Da $y_0 = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + c_3\vec{v}_3$ si ricava

$$\begin{cases} 1 = y_1(0) = c_1 - c_2 \\ 1 = y_2(0) = c_2 \\ 1 = y_3(0) = -c_1 + c_3 \end{cases} \iff \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 3. \end{cases}$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi:

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{At}y_0 = c_1e^{At}\vec{v}_1 + c_2e^{At}\vec{v}_2 + c_3e^{At}\vec{v}_3 = c_1e^{2t}\vec{v}_1 + c_2e^{2t}\vec{v}_2 + c_3e^{2t}(I + (A - 2I)t)\vec{v}_3 \\ &= c_1e^{2t}\vec{v}_1 + (c_2 + c_3t)e^{2t}\vec{v}_2 + c_3e^{2t}\vec{v}_3 = 2e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + (1 + 3t)e^{2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} y_1(t) &= (1 - 3t)e^{2t} \\ y_2(t) &= (1 + 3t)e^{2t} \\ y_3(t) &= e^{2t}. \end{aligned}$$