

Esercizio A1. [punti 10] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 5n + 11)(1 - e^{2/n})}{\log(6 + n^9 + 2^n)} \cdot \frac{n! - (n-1)!\sqrt{n^2 + 5}}{(n+1)! \sin\left(\frac{2+e^{-n}}{3n^3+\sqrt{n}}\right)} \cdot \left(\frac{n^2}{n^2 - 4}\right)^{n^2}.$$

Svolgimento: Posto

$$a_n := \frac{(n^2 + 5n + 11)(1 - e^{2/n})}{\log(6 + n^9 + 2^n)} \cdot \frac{n! - (n-1)!\sqrt{n^2 + 1}}{(n+1)! \sin\left(\frac{1+e^{-n}}{4n^3+\sqrt{n}}\right)} \cdot \left(\frac{n^2}{n^2 - 4}\right)^{n^2},$$

si ha

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n^2(1 + o(1))(-\frac{2}{n}(1 + o(1)))}{\log(2^n(1 + o(1)))} \cdot \frac{n - \sqrt{n^2 + 1}}{(n+1)n \cdot \sin\left(\frac{1+o(1)}{4n^3(1+o(1))}\right)} \cdot \exp\left(n^2 \log\left(\frac{n^2}{n^2 - 4}\right)\right) \\ &= \frac{-2n(1 + o(1))}{n \log 2(1 + o(1))} \cdot \frac{\frac{n^2 - (n^2 + 1)}{n + \sqrt{n^2 + 1}}}{n^2(1 + o(1)) \cdot \frac{1}{4n^3}(1 + o(1))} \cdot \exp\left(n^2 \log\left(1 + \frac{4}{n^2 - 4}\right)\right) \\ &= -\frac{2}{\log 2}(1 + o(1)) \cdot \frac{-\frac{1}{2n}(1 + o(1))}{\frac{1}{4n}(1 + o(1))} \cdot \exp\left(n^2 \cdot \frac{4}{n^2 - 4}(1 + o(1))\right) \\ &= -\frac{2}{\log 2}(1 + o(1)) \cdot (-2)(1 + o(1)) \cdot \exp(4 + o(1)) \rightarrow \frac{4e^4}{\log 2}. \end{aligned}$$

Esercizio A2. [punti 10] Determinare il limite, per $x \rightarrow 3^+$, e $x \rightarrow +\infty$, della seguente funzione

$$f(x) = \frac{4\sqrt{x^2-9} \log(5+x^3)}{(2x+5) \log(x-2+5\sqrt{x^2-9})}.$$

Svolgimento: Per determinare il limite per $x \rightarrow 3^+$, cambiamo variabile, ponendo $y = x - 3$, per cui si ha, per $y \rightarrow 0^+$,

$$\begin{aligned} f(3+y) &= \frac{4\sqrt{(y+3)^2-9} \log(5+(y+3)^3)}{(2y+11) \log\{1+y+5\sqrt{(y+3)^2-9}\}} = \frac{4\sqrt{6y+y^2} \log(5+27+o(1))}{(11+o(1)) \log\{1+y+5\sqrt{6y+y^2}\}} \\ &= \frac{4\sqrt{6y(1+o(1))} \log(32)(1+o(1))}{(11+o(1)) \log\{1+y+5\sqrt{6y(1+o(1))}\}} = \frac{4\sqrt{6} \log(32) \sqrt{y}(1+o(1))}{(11+o(1)) \log\{1+5\sqrt{6}\sqrt{y}+o(\sqrt{y})\}} \\ &= \frac{4\sqrt{6} \log(32) \sqrt{y}(1+o(1))}{11 \cdot 5\sqrt{6} \cdot \sqrt{y}(1+o(1))} = \frac{4 \log(32)}{55} (1+o(1)) = \frac{4 \log 2}{11} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{4 \log 2}{11}.$$

D'altra parte, per $x \rightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4\sqrt{x^2(1+o(1))} \log(x^3(1+o(1)))}{2x(1+o(1)) \log\{x(1+o(1))+5\sqrt{x^2(1+o(1))}\}} \\ &= \frac{4x(1+o(1)) 3 \log x(1+o(1))}{2x(1+o(1)) \log\{6x(1+o(1))\}} = \frac{6 \log x(1+o(1))}{\log x + \log 6 + o(1)} = \frac{6 \log x(1+o(1))}{\log x(1+o(1))} = 6(1+o(1)), \end{aligned}$$

per cui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 6.$$

Esercizio A3. [punti 10] Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{|x+2| + \log(x^4)}{x}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescita o decrescenza. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità. **Non** è richiesto lo studio di f'' .

Svolgimento: Osserviamo che $x^4 = |x|^4$, $\forall x \in \mathbb{R}$, per cui $f(x) = \frac{|x+2|+4\log|x|}{x}$. Il dominio di f è $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2+4\log|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+o(1))}{x} = 1, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x-2+4\log|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x(1+o(1))}{x} = -1, \\ \lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{4\log|x|}{x}(1+o(1)) = \mp\infty.\end{aligned}$$

Allora $x = 0$ è un asintoto verticale, mentre $y = -1$ è asintoto orizzontale, per $x \rightarrow -\infty$, e $y = 1$ è asintoto orizzontale, per $x \rightarrow +\infty$. Inoltre,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x-2+4\log|x|}{x}, & x < -2, \\ \frac{x+2+4\log|x|}{x}, & x > -2, \end{cases} \implies f'(x) = \begin{cases} \frac{6-4\log|x|}{x^2}, & x < -2, \\ \frac{2-4\log|x|}{x^2}, & x > -2 \end{cases}$$

per cui $f'(x) \geq 0 \iff x \neq 0$, e

$$\begin{cases} x < -2 \\ 6-4\log|x| \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x > -2 \\ 2-4\log|x| \geq 0 \end{cases} \iff -e^{3/2} \leq x < -2 \vee -\sqrt{e} \leq x \leq \sqrt{e}.$$

Pertanto f è crescente in $[-e^{3/2}, -2]$, in $[-\sqrt{e}, 0)$, e in $(0, \sqrt{e}]$, mentre f è decrescente in $(-\infty, -e^{3/2}]$, in $[-2, -\sqrt{e}]$, e in $[\sqrt{e}, +\infty)$. Infine, $x = -e^{3/2}$ e $x = -\sqrt{e}$ sono punti di minimo locale, mentre $x = -2$ e $x = \sqrt{e}$ sono punti di massimo locale. Studiamo la derivata in $x = -2$. Si ha

$$\begin{aligned}f'_-(-2) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{6-4\log|x|}{x^2} = \frac{6-4\log 2}{4} = \frac{3-2\log 2}{2}, \\ f'_+(-2) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{2-4\log|x|}{x^2} = \frac{2-4\log 2}{4} = \frac{1-2\log 2}{2},\end{aligned}$$

per cui $x = -2$ è un punto angoloso.

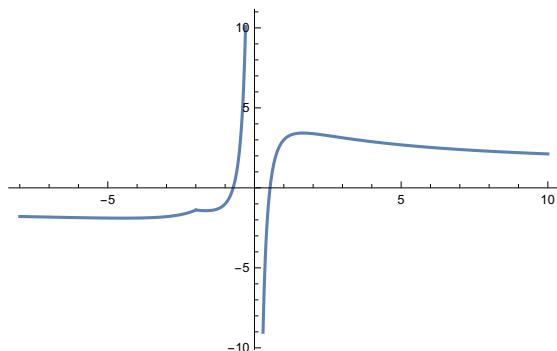


Figura 1: Grafico della funzione.