Analisi Matematica I (14/09/2020)

Esercizio A1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{5}{6x}-1+3^{-x}\Big(2+\cos\Big(\frac{\sqrt{5}}{x}\Big)\Big)^{x}\right)\big(x^2+\log^2 x\big)\,.$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y\to 0$:

$$\cos y = 1-\frac{y^2}{2}+o(y^3),\quad \log(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+o(y^2),\quad e^y=1+y+\frac{y^2}{2}+o(y^2).$$

Pertanto, per $x\to+\infty$,

$$\begin{aligned}\Big(2+\cos\Big(\frac{\sqrt{5}}{x}\Big)\Big)^{x} &= \Big(3-\frac{5}{2x^2}+o\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\Big)^{x} = 3^x\Big(1-\frac{5}{6x^2}+o\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\Big)^{x}\\ &= 3^x e^{x\log(1-\frac{5}{6x^2}+o(\frac{1}{x^3}))} = 3^x e^{x(-\frac{5}{6x^2}+o(\frac{1}{x^3}))} = 3^x e^{-\frac{5}{6x}+o(\frac{1}{x^2})}\\ &= 3^x\Big(1-\frac{5}{6x}+\frac{25}{72x^2}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big),\end{aligned}$$

da cui segue

$$\frac{5}{6x}-1+3^{-x}\Big(2+\cos\Big(\frac{\sqrt{5}}{x}\Big)\Big)^{x} = \frac{5}{6x}-1+1-\frac{5}{6x}+\frac{25}{72x^2}+o\Big(\frac{1}{x^2}\Big) = \frac{25}{72x^2}+o(1).$$

D'altra parte

$$x^2+\log^2 x = x^2+o(x^2).$$

Pertanto il limite richiesto vale

$$\frac{25}{72}.$$

Esercizio A2. Determinare la derivata prima e gli intervalli di monotonia della seguente funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{|x+1|}.$$

Svolgimento: Per $x > -1$:

$$f'(x) = \frac{\frac{x^2}{(x^3+1)^{2/3}}(x+1) - \sqrt[3]{x^3+1}}{(x+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x+1)^2(x^3+1)^{2/3}},$$

pertanto f è crescente per $x \geq 1$, e f è decrescente per $-1 < x \leq 1$.

Per $x < -1$:

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x+1)^2(x^3+1)^{2/3}},$$

pertanto f è decrescente per $x < -1$.

In conclusione, f è crescente in $[1, +\infty)$, ed è decrescente in $(-\infty, -1)$, e in $(-1, 1]$.

Esercizio A3. Determinare le primitive della funzione

$$f(x) = \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}},$$

e calcolare il seguente integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}\, dx.$$

Svolgimento: Con la sostituzione $\sqrt{x} = t$ si ha:

$$\int_2^{+\infty} x^{3/2}e^{-\sqrt{x}}\, dx = 2\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} t^2 e^{-t}\, dt.$$

Integrando per parti

$$\begin{aligned}
\int t^2 e^{-t}\, dt &= -\int t^2 (e^{-t})'\, dt = -t^2 e^{-t} + 2\int te^{-t}\, dt \\
&= -t^2 e^{-t} - 2\int t(e^{-t})'\, dt = -t^2 e^{-t} - 2te^{-t} + 2\int e^{-t}\, dt \\
&= -t^2 e^{-t} - 2te^{-t} - 2e^{-t} + c
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_2^{+\infty} x^{3/2}e^{-\sqrt{x}}\, dx = 2\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} t^2 e^{-t}\, dt &= -2\lim_{t\to+\infty} e^{-t}(t^2+2t+2) + 2e^{-\sqrt{2}}(4+2\sqrt{2}) \\
&= 4e^{-\sqrt{2}}(2+\sqrt{2}).
\end{aligned}$$