Analisi Matematica I (19/06/2020)

Esercizio B1. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\Bigg(\log\left(e+\frac{1}{n^2}\right)-\cos\left(\frac{3}{n}\right)\Bigg).$$

Svolgimento: Utilizziamo gli sviluppi di Taylor per $y \to 0$:

$$\cos y = 1-\frac{y^2}{2}+o(y^3), \quad \log(1+y) = y-\frac{y^2}{2}+o(y^2), \quad e^y = 1+y+o(y).$$

Si ha:

$$\log\left(e+\frac{1}{n^2}\right)-\cos\left(\frac{3}{n}\right) = 1+\log\left(1+\frac{1}{en^2}\right)-\cos\left(\frac{a}{n}\right) = 1+\frac{1}{en^2}-\Big(1-\frac{9}{2n^2}\Big)+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big) = \frac{2+9e}{2en^2}+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

da cui segue

$$n^2\Big(\log\left(e+\frac{1}{n^2}\right)-\cos\left(\frac{3}{n}\right)\Big) = \frac{2+9e}{2e}+o(1).$$

Esercizio B2. Determinare il dominio della seguente funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2-|x-2|}{x^2+2}\right).$$

Svolgimento: Si ha

$$\operatorname{dom} f = \left\{x\in\mathbb{R}\,\Big|\, -1\le\frac{x^2-|x-2|}{x^2+2}\le 1\right\} = \Big(-\infty,-\frac{1}{2}\Big]\cup[0,+\infty).$$

Infatti,

$$\begin{aligned}
-1\le\frac{x^2-|x-2|}{x^2+2}\le 1 \iff& -x^2-2\le x^2-|x-2|\le x^2+2 \iff -2\le|x-2|\le 2x^2+2\\
\iff& -(2x^2+2)\le x-2\le 2x^2+2 \iff \begin{cases}2x^2-x+4\ge 0\\ 2x^2+x\ge 0\end{cases}\\
\iff& x(2x+1)\ge 0 \iff x\in\Big(-\infty,-\frac{1}{2}\Big]\cup[0,+\infty).
\end{aligned}$$

Esercizio B3. Determinare le primitive della funzione

$$f(x) = e^{-4x} \arctan(1 - e^{-4x}),$$

e calcolare il seguente integrale improprio:

$$\int_0^{+\infty} e^{-4x} \arctan(1 - e^{-4x})\, dx\,.$$

Svolgimento: Si ha

$$\begin{aligned}
\int e^{-4x} \arctan(1-e^{-4x})\, dx &\overset{(a)}{=} \frac{1}{4}\int \arctan(1-t)\, dt \overset{(b)}{=} \frac{1}{4}\int \arctan(s)\, ds \\
&\overset{(c)}{=} \frac{1}{4}\Big(s\arctan(s) - \int \frac{s}{1+s^2}\, ds\Big) = \frac{1}{4}\Big(s\arctan(s) - \frac{1}{2}\log(1+s^2)\Big) * C \\
&= \frac{1}{4}(1-t)\arctan(1-t) - \frac{1}{8}\log\big(1+(1-t)^2\big) + C \\
&= \frac{1}{4}(1-e^{-4x})\arctan(1-e^{-4x}) - \frac{1}{8}\log\big(1+(1-e^{-4x})^2\big) + C,
\end{aligned}$$

dove si è usato: in (a) la sostituzione $e^{-4x} = t$, in (b) la sostituzione $1-t = s$, in (c) l'integrazione per parti, con $\begin{cases} f(s) = \arctan s, & f'(s) = \frac{1}{1+s^2}, \\ g'(s) = 1, & g(s) = s. \end{cases}$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} e^{-4x} \arctan(1-e^{-4x})dx &= \frac{1}{4}\int_0^1 \arctan(s)ds = \frac{1}{4}\Big[s\arctan(s) - \frac{1}{2}\log(1+s^2)\Big]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\log 2.
\end{aligned}$$