Analisi Matematica I
Calcolo differenziale e applicazioni

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti funzioni sono derivabili in $x_0 = 0$.

(1) $f(x) = x|x|$

(2) $f(x) = |x| \sin x$

(3) $f(x) = |x \sin x|$

(4) $f(x) = x \sin \sqrt[3]{x}$

(5) $f(x) = (e^x - 1) \sin \sqrt[3]{x}$

(6) $f(x) = |e^x - 1| \sin \sqrt[3]{x}$

(7) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{\log(1+|x|)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(8) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{\log(1+x^2)} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(9) $f(x) = |\log(1+x)|^{1/2} |x|^{3/4}$

(10) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(11) $f(x) = x\sqrt{|x|}$

(12) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\sqrt[3]{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(13) $f(x) = \sqrt{|\sin^3 x|}$

(14) $f(x) = |x| \cos x$

(15) $f(x) = \sqrt{|x|}$

(16) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 |x|}{\sqrt[3]{x^4}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(17) $f(x) = \begin{cases} \frac{|1-e^x|}{\sqrt[5]{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(18) $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|1-e^x|}}{\sqrt[5]{|x|}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

(19) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

Esercizio 2. Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto x_0.

(1) $f(x) = x^{1/x}, \qquad x_0 = 1$

(2) $f(x) = \log \log x, \qquad x_0 = e$

(3) $f(x) = \dfrac{\log x}{1+\log x}, \qquad x_0 = e$

(4) $f(x) = \sin(e^{2x^2+1}), \qquad x_0 = 1$

(5) $f(x) = \arcsin(\log x + 1), \qquad x_0 = \dfrac{1}{e}$

(6) $f(x) = \log\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \arcsin x\right)\right), \qquad x_0 = \dfrac{1}{2}$

(7) $f(x) = \operatorname{arsinh}(1+\sinh x), \qquad x_0 = 0$

Esercizio 3. Determinare estremo superiore/inferiore di f nell'insieme A indicato.

(1) $f(x) = x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + 1, \qquad A = [-2, 3]$

(2) $f(x) = |x|^3 + \dfrac{3}{2}x^2 - 6x + 1, \qquad A = [-2, 3]$

(3) $f(x) = \sqrt[3]{|x|}, \qquad A = [-1, 2]$

(4) $f(x) = x|x|, \qquad A = [-2, 1]$

(5) $f(x) = \dfrac{x^2 + |x|}{x^2+1}, \qquad A = [-2, 3]$

(6) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3|x+1| + 1}{x^2+4}, \qquad A = [-2, 2]$

Esercizio 4. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza/decrescenza. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità.

(1) $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x^2+1}$

(2) $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{2x^2-1}$

(3) $f(x) = \dfrac{x^2+|x|}{x^2+1}$

(4) $f(x) = x^2 - 3x^{2/3}$

(5) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x+1}$

(6) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$

(7) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^4}{|3-x^2|} - 2}$

(8) $f(x) = x^2 \left(\log(\dfrac{x}{4}) - 1\right)^2$

(9) $f(x) = \dfrac{e^{-x^2}}{x+2}$

(10) $f(x) = (x^2 + 12x)e^{-2/x}$

(11) $f(x) = xe^{\frac{x}{1+x}}$

(12) $f(x) = |x|e^{\frac{x}{1+x}}$

(13) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

(14) $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{1}{x^2-x}\right)$

(15) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\log\left(\dfrac{x}{(x+3)|x+4|}\right)\right)$

(16) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(x\exp\left(\dfrac{1}{x^2-1}\right)\right)$

(17) $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} + \dfrac{1}{\cos x}$

(18) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right)$

(19) $f(x) = \sin\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)$

(20) $f(x) = \sqrt{\cos\left(\dfrac{2x^2-1}{x^2+1}\right)}$

Esercizio 5. Tracciare il grafico delle seguenti funzioni specificando: dominio, eventuali asintoti, punti di massimo/minimo relativo, intervalli di crescenza/decrescenza. Studiare il comportamento della funzione negli eventuali punti di non derivabilità. Determinare eventuali punti di flesso, e intervalli di concavità/convessità.

(1) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2|x| + 1}{x+1}$

(2) $f(x) = \dfrac{4|x^2 + x| - 1}{x^2}$

(3) $f(x) = \dfrac{|x^2 - 1| - 1}{(x-1)^2}$

(4) $f(x) = x - \log(x^2 + x + 1)$

(5) $f(x) = |x| - \log(x^2 + x + 1)$

(6) $f(x) = (x^2 + x)e^{x+1}$

(7) $f(x) = (x^2 + x)e^{-(x+1)}$

(8) $f(x) = e^{\frac{x}{1+x}}$

(9) $f(x) = e^{\frac{x}{|1+x|}}$

(10) $f(x) = \operatorname{arctg}(1 - x^2)$

(11) $f(x) = \operatorname{arctg}(1-x^2) + \operatorname{arctg}\Big(\dfrac{1}{|1-x^2|}\Big)$

Esercizio 6. Determinare se le seguenti funzioni sono iniettive. In caso affermativo, determinare il valore della derivata prima della funzione inversa nel punto (x_0, y_0) specificato.

(1) $f(x) = e^{x^3} + 2e^{\operatorname{arctg}(3x)} - 1, \qquad (0, 2)$

(2) $f(x) = \log(x^3 + x^2 + e),\ x > 0, \qquad (1, \log(2 + e))$

(3) $f(x) = \sqrt[5]{1 - x - \cos x}, \qquad (0, 0)$

(4) $f(x) = e^{2x} - 2x^2, \qquad (0, 1)$
(Suggerimento: tracciare il grafico di f'.)

(5) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - e^x + 1, \qquad (0, 0)$
(Suggerimento: tracciare il grafico di f'.)

Esercizio 7. Determinare lo sviluppo di Taylor, di ordine n e centro x_0 indicati, delle seguenti funzioni.

(1) $f(x) = \cos x - e^{-x^2/2},\ n = 6,\ x_0 = 0$

(2) $f(x) = \log\Big(\dfrac{2x+1}{3}\Big) - \log\Big(\dfrac{x+2}{3}\Big),\ n = 4,\ x_0 = 1$

(3) $f(x) = \cos x \log(1 + x^2),\ n = 6,\ x_0 = 0$

(4) $f(x) = \log(1 + x) \operatorname{arctg} x - x \sin x,\ n = 5,\ x_0 = 0$

(5) $f(x) = \big(e^{-x^2} - \cos(x\sqrt{2})\big)^2,\ n = 8,\ x_0 = 0$

(6) $f(x) = x^2(\log(1 + x))^2 - \cos(2x),\ n = 6,\ x_0 = 0$

(7) $f(x) = \sin(x^2 + x^3),\ n = 8,\ x_0 = 0$

(8) $f(x) = 2\log(\cos x) + \sin x^2,\ n = 4,\ x_0 = 0$

(9) $f(x) = (\arcsin x)^2 + 2\log(1 - \sin^2 x),\ n = 4,\ x_0 = 0$

(10) $f(x) = \sin\Big(\dfrac{\pi}{2}x\Big) - \log\sin\Big(\dfrac{\pi}{2}x\Big),\ n = 4,\ x_0 = 1$

(11) $f(x) = \sqrt[4]{1 - \sin(x^2)} - \cos(2x),\ n = 6,\ x_0 = 0$

(12) $f(x) = x^{x-1},\ n = 4,\ x_0 = 1$

(13) $f(x) = 3\cos\big(\sin(2x) - 2\log(1 + x)\big),\ n = 6,\ x_0 = 0$

(14) $f(x) = \exp\big(x^2 \log(1 + x + x^2)\big) + x \sin x,\ n = 5,\ x_0 = 0$

(15) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x \sin x},\ n = 6,\ x_0 = 0$

(16) $f(x) = \dfrac{1}{\cosh x},\ n = 6,\ x_0 = 0$

(17) $f(x) = \cosh(x - x^2) - \log(1 - x^2),\ n = 5,\ x_0 = 0$

(18) $f(x) = \log(1 + x \sinh x),\ n = 6,\ x_0 = 0$

Esercizio 8. Calcolare i seguenti limiti.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2} - \cos(\sqrt{2}x)}{x^3 \sin x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sqrt{2}x^2) - e^{-x^4}}{x^5 (\arcsin x)^3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^3 (e^x - \cos x)}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 (\arcsin x - x)}{\sin^3 x - x^3}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - \log(1+x^2)}{x^2 - x \arcsin x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^3) - \sin^3 x}{x^2 \operatorname{arctg}(x^3)}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x \log(1+x)}{\operatorname{tg}^2 x \log(1+x)}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2) - (\log(1+x))^2 - x^3}{x^2 \operatorname{arctg}(x^2)}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(6x) - 6x\, e^{-6x^2}}{x^3 (\operatorname{arctg} x)^2}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x}{\sqrt{\cos x} - 1}$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(\log(1+x^2)) - x^2}{x^4}$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x - \log(\cos x)}{x \sin x}$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(\sin^2 x - \log(\cos x)) \log(1+\sin x)}{\sin^2 x \sin(2x)}$

(14) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{\operatorname{tg} x - x}$

(15) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(3x^2 \log\left(1+\frac{1}{x}\right) - 2x + (x^2+x)\log\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)$

(16) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x^4 \left(1 - \cos\frac{2}{x} - x \log\left(1+\frac{2}{x^3}\right) + \frac{3}{x^5}\right)$

(17) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{e^x - 4e^{\sqrt{x}} + 3e^{\sqrt[3]{x}}}{\log x - x + 1}$

(18) $\displaystyle\lim_{x\to \pi} \frac{(\pi - x)^2 - 8 + 8\sin(x/2)}{4\cos^2(x/2) - (\pi - x)^2}$

(19) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2) - \sinh(x^2)}{x^2 (\operatorname{arctg} x)^2}$

(20) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x^2) - x\sinh(x) + \frac{2}{3}x^4}{(\operatorname{arctg} x - x)^2}$

(21) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - \cosh(x)}{(e^{x^2} - \cos x)^2}$

Esercizio 9. Calcolare il limite per $n \to \infty$ delle seguenti successioni.

(1) $a_n = \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\left(3n^2 \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - 2n + (n^2+n)\log\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right)$

(2) $a_n = n^4\left(1 - \cos\dfrac{2}{n} - n\log\left(1+\dfrac{2}{n^3}\right) + \dfrac{3}{n^5}\right)$

(3) $a_n = n^3\sqrt[n]{\dfrac{n+1}{n}} - n^3 - n$

(4) $a_n = n^3\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} - n^3 - \dfrac{1}{2}n^2 + \dfrac{1}{8}n$

(5) $a_n = \dfrac{(\operatorname{arctg}\frac{1}{n} - \frac{1}{n})(\sin\frac{1}{n} + e^{-n})}{e^{-\frac{1}{2n^2}} - \cos\frac{1}{n}}$

(6) $a_n = \dfrac{(1+\frac{2}{n})^{n^2} + n^{\sqrt{n}}}{e^{2n} - 3^{n\operatorname{arctg} n}}$

(7) $a_n = \dfrac{(n+\sqrt{n})^n + (n+2)^n + 3n!}{(n+4)^n(e^{\sqrt{n+1}} + 2^{\sqrt{n}})}$

(8) $a_n = \dfrac{n^{n+1}(n^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1)(\sqrt{n+1}+1)}{(n+\log n)^n(1+\log n)}$

(9) $a_n = \dfrac{3n! + (en)^n + (5\sqrt[3]{n+2})^n}{\left((n+1)(1+\frac{1}{n})^n + 1\right)^n}$

(10) $a_n = \dfrac{(n - \log n + 2)^n(n + \log\log n)^n}{(n^2 + 5\log n)^n - (n^2+2)^n}$

(11) $a_n = \dfrac{(2+n^{1/n})^n(\sqrt[3]{\sqrt{n}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{n}+1}\,)}{(1+2\pi^{1/n})^n + (1+\log n)^{\log n}}$

(12) $a_n = \dfrac{(2+8^{1/n})^n - 2\cdot 3^n}{(3n^{1/n} + \frac{1}{n})^n(\sqrt[n]{n^2+2n} - n^{2/n})}$

(13) $a_n = \dfrac{\left(e^{3/n^2} - \cos(\frac{1}{2n})\right)^{n^2}}{\left(e^{2/n^2} - \cos(\frac{3}{2n})\right)^{n^2}}$