ESERCIZI DI GEOMETRIA 4

1. Si costruisca per ogni $n \in \mathbb{N}$ uno spazio topologico X_n tale che $\pi_1(X_n) = \mathbb{Z}_n$ (a meno di un isomorfismo dato). Per ogni omomorfismo $\phi : \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$ si costruisca una funzione continua $f : X_m \to X_n$ tale che $f_* = \phi : \pi(X_m) \to \pi(X_n)$.
SOLUZIONE:
Supponiamo che $n > 0$. Sia X_n il quoziente del disco unitario chiuso $D = \{z | z \in, |z| \leq 1\}$ per la relazione di equivalenza che identifica $z \sim \zeta z$ se $\zeta^n = 1$. Scriviamo $U = X_n \setminus (0,0)$, $V = \overset{\circ}{D} / \sim \cong \overset{\circ}{D}$. Allora $\pi_1(U) \cong \mathbb{Z}$, $\pi_1(V) = \{0\}$, $\pi_1(U \cap V) = \mathbb{Z}$, e $(i_U)_* : \pi_1(U \cap V) \to \pi_1(U)$ si identifica con la moltiplicazione per n. Per Van Kampen $\pi_1(X_n) \cong (\mathbb{Z} * 0)/(n\mathbb{Z} * 0) = \mathbb{Z}_n$. Si noti che per $n = 1$ $X_1 = D$ che è contraibile e infatti $\pi_1(X_1) = \mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = 0$. Per $n = 0$ basta prendere $X_0 = S^1$ e quindi $\pi_1(X_0) \cong \mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}/0\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Il generatore del gruppo fondamentale è la classe del cammino chiuso $\gamma_n : [0,1] \to X_n$ dove $\gamma_n(t) = [e^{2\pi i t/n}]$.
Supponiamo che $m > 0$ e $n > 0$. Sia $[k] = \phi([1]) \in \mathbb{Z}_n$. Vogliamo quindi costruire una funzione $f : X_m \to X_n$ tale che $f_*([\gamma_m]) = \phi(1)[\gamma_n]$. Posto $k = \phi(1)$ si ha che km è un multiplo di n, diciamo $km = hn$. Definiamo $f([z]) = [z^h]$. Questa è ben definita: se $x \sim \zeta x$ con $\zeta^m = 1$ allora $(x\zeta)^h = x^h \zeta^h$, ma $(\zeta^h)^n = (\zeta^m)^k = 1$. Inoltre f_* manda $[\gamma_m]$ in $k[\gamma_n]$, rappresentato dal cammino $t \mapsto [e^{2\pi i k/n}]$. Per $m = 0$ e $n > 0$ basta considerare la funzione $f : S^1 \to X_n$ $f(e^{it}) = [e^{itk/n}]$, per $m = 0$, $n = 0$ $f : S^1 \to S^1$ $f(z) = z^k$ e per $m > 0$, $n = 0$ $f([z]) = 1$ deve essere costante.

2. Sia S una superficie connessa compatta e $T \subset S$ un sottospazio finito. Si dimostri che il quoziente S/T è omotopicamente equivalente all'unione a un punto di S e di $\#T - 1$ circonferenze.
SOLUZIONE:
Scriviamo $T = \{x_0, \ldots, x_n\}$ con $n = \#T - 1$. Si consideri lo spazio topologico X ottenuto come quoziente dell' unione disgiunta di S e di n copie di $[0,1]$ i cui estremi sono identificati rispettivamente con x_0 e con x_i per $i = 1, \ldots, n$. Abbiamo una mappa quoziente $q : X \to S/T$ che manda tutti gli intervalli in un punto solo. Scegliamo dei cammini con gli interni disgiunti $\gamma_i : [0,1] \to S \subset X$ tali che $\gamma_i(0) = x_0$ e $\gamma_i(1) = x_i$. Allora $X/(\cup_i Im(\gamma_i))$ è omeomorfo all'unione ad un punto di X e di $n-1$ circonferenze. Sia $p : X \to X/(\cup_i Im(\gamma_i))$ la proiezione sul quoziente. Sia p che q sono equivalenze omotopiche. Per ogni x_i possiamo scegliere un intorno chiuso V_i omeomorfo al disco unitario chiuso D tramite un omeomorfismo $\phi_i : V_i \cong D$ tale che $\phi_i(x_i) = 0$. Possiamo inoltre supporre che $V_i \cap V_j = \emptyset$ se $i \neq j$. L'inversa omotopica di q, denotata q', manda $x \in V_i$, se $||\phi_i(x)|| \leq 1/2$, nell'i-sima copia di $[0,1]$ in modo che $q'(x) = 2||\phi_i(x)|| \in [0,1]_i$, mentre se $||\phi_i(x)|| \geq 1/2$ allora $q'(x) \in V_i$ in modo che $\phi_i(q'(x)) = (2||\phi_i(x)|| - 1)\phi_i(x)$. Inoltre q' è l'identità sul complementare dell'unione dei V_i. L'inversa omotopica di p, denotata p', manda la prima

metà della i-sima circonferenza nell' i-simo intervallo $[0,1]_i \subset X$, e la seconda metà nell'immagine del cammino γ_i in modo che p' mandi la classe del punto base in $x_0 \in X$. Inoltre p' manda S in X tramite l'inclusione. Le omotopie $pp' \simeq id$, $p'p \simeq id$, $qq' \simeq id$, $q'q \simeq id$ si ottengono interpolando opportunamente i parametri.

3. Si considerino gli spazi topologici $X = S^1 \times S^1 - \{(1,1)\}$ e $Y = S^2 - \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Si dica se X e Y sono omotopicamente equivalenti, e se sono omeomorfi.

   SOLUZIONE: Entrambi gli spazi hanno un retratto di deformazione, che è l'unione ad un punto di due circonferenze, quindi sono omotopicamente equivalenti. Se fossero omeomorfi, le loro compattificazioni ad un punto sarebbero omeomorfe. Ma X^+ è omeomorfo a $S^1 \times S^1$, mentre Y^+ è omeomorfo a $S^2/\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, che per l'esercizio precedente è omotopicamente equivalente all'unione a un punto di una sfera e due circonferenze. Si ha che $\pi_1(X^+) = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, mentre utilizzando Van Kampen $\pi_1(Y^+) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, dunque gli spazi non sono omeomorfi.

4. Esiste una funzione continua $g : \mathbb{RP}^2 \to K$ verso la bottiglia di Klein tale che g_* è non banale?

   SOLUZIONE: Sappiamo che $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \cong \mathbb{Z}_2$ mentre $\pi_1(K)$ ha due generatori a, b e la relazione $aba = b$. Esiste un elemento non banale di ordine 2 in $\pi_1(K)$? Gli elementi del gruppo si possono scrivere in modo unico come $a^k b^h$, con $h, k \in \mathbb{Z}$, e $a^k b^h a^{k'} b^{l'} = a^{k+(-1)^h k'} b^{h+l'}$ dunque non ci sono elementi di ordine 2 e la risposta è negativa.

5. Si consideri il quoziente $X = D_2/\sim$ del disco unitario per la relazione di equivalenza che identifica $x \sim -x$ se $||x|| = 1$ e inoltre $(1,0) \sim (0,1) \sim (-1,0) \sim (0,-1)$. Si costruisca una funzione continua $f : \mathbb{RP}^2 \to X$ tale che f_* è non banale. Si dica se X è omotopicamente equivalente a una superficie connessa compatta.

   SOLUZIONE: Calcoliamo il gruppo fondamentale di X. Come al solito $U = (D_2 \setminus (0,0))/\sim$ ha come retratto di deformazione $S^1/\sim$ che è l'unione a un punto di due circonferenze, dunque $\pi_1(U) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, con generatori a e b. Poniamo $V = \overset{\circ}{D}_2$, per cui $\pi_1(V) = 0$, $\pi_1(U \cap V) = \mathbb{Z}$, e l'omomorfismo $(i_U)_* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ manda 1 in $abab$. Quindi per Van Kampen $\pi_1(X)$ ha generatori a, b e la relazione $(ab)^2 = 1$. In effetti $\pi_1(X) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}_2$ con generatori a e ab. La proiezione naturale $\mathbb{RP}^2 \to X$ tra quozienti del disco induce sui gruppi fondamentali l'omomorfismo che manda $[1] \in \mathbb{Z}_2$ in $ab \neq 1$ ed è la funzione richiesta. Consideriamo ora l'abelianizzato di $\pi_1(X)$. Questo è il gruppo abeliano con due generatori a, b tali che $2(a + b) = 0$, ovvero $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_2$. L'unica superficie che ha questo gruppo fondamentale abelianizzato è la bottiglia di Klein K. Ma $\pi_1(K)$ non ha elementi di ordine 2, come visto nell'esercizio precedente, diversamente da $\pi_1(X)$, quindi X non è omotopicamente equivalente a una superficie.

6. Date due sfere disgiunte S e S', e tre dischi chiusi disgiunti su ciascuna

di esse, $D_1, D_2, D_3, D'_1, D'_2, D'_3$ si rimuova la parte interna dei dischi, e si identifichino i bordi di D_1 e D'_1, e di D_3 e D'_3 rispettivamente, in senso concorde, e quelli di D_2 e D'_2 in senso discorde. Identificare la superficie che si ottiene.

SOLUZIONE: l'identificazione tra i bordi di D_2 e D'_2 (percorsi in senso orario e antiorario rispettivamente visti dall'esterno delle sfere) produce una superficie omeomorfa a una sfera. L'identificazione tra il bordo di D_1 e di D'_1 in senso concorde produce una bottiglia di Klein. L'identificazione del bordo di D_3 e D'_3 produce la somma connessa di due bottiglie di Klein, una superficie non orientabile di genere 2.