COGNOME . . . . NOME . . . . MATRICOLA . . . .

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO.

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ sia $V := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4 \ : \ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \ x_3 + 3x_4 = 0, \ 2x_3 - 3x_4 = 0\}$.

(i) Determinare una base di V.

(ii) Determinare una base ortonormale dello spazio vettoriale $V^\perp$ ortogonale a V.

(iii) Determinare delle equazioni per l'intersezione $U \cap V^\perp$, dove $U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{E}^4 \ : \ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0.\}$

Esercizio 2. Al variare di t nel campo dei numeri reali, si consideri il sistema lineare non omogeneo la cui matrice completa è $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & t & t & 0 \\ 1 & 1 & t & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Detrminare i valori di t per i quali il sistema è compatibile.

(ii) Determinare tutti i valori di t per i quali il determinante della matrice incompleta vale 1. Per tali valori studiare l'insieme delle soluzioni del sistema.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ sia π il piano di equazione $x + 2y + 2z = 4$ ed r la retta per l'origine a lui perpendicolare.

(i) Determinare equazioni cartesiane e parametriche della retta r e le coordinate dell'intersezione $\pi \cap r$.
(ii) Calcolare l'area del triangolo i cui vertici sono le intersezioni del piano π con gli assi.
(iii) Determinare il raggio della circonferenza definita da $\pi \cap \{x^2 + y^2 + z^2 - 4y = 0\}$.

Esercizio 4. Si scelga un'isometria lineare diretta $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ che trasforma il sottospazio vettoriale di equazione $x + 2y + z = 0 = 3x - 2y - z$ in quello generato dal vettore $(1, 0, -2)$ e il piano di equazione $x = 0$ in quello di equazione $y = 0$. Si determini la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica.

Esercizio 5. Viene assegnata la base $\mathcal{B} := \{(1,0,1), (1,0,2), (1,4,1)\}$ di $\mathbb{E}^3$ e l'applicazione lineare $L : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ rappresentata, rispetto a tale base, dalla matrice $M_{\mathcal{B}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Determinare nucleo ed immagine di L, indicando per entrambi delle equazioni rispetto alle coordinate standard di $\mathbb{E}^3$.

(ii) Stabilire se L è diagonalizzabile. In caso affermativo determinarne una base diagonalizzante.

(iii) Sia V il sottospazio di $\mathbb{E}^3$ definito da $8x - 3y - 3z = 0$. Si mostri che $L(V) \subset V$ e si stabilisca, motivando la risposta, se la restrizione $L|_V : V \to V$ di L a V è un endomorfismo autoaggiunto.

Esercizio 6. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^2$ sia $\mathcal{C}$ la parabola di fuoco $(4,3)$ e direttrice $4x + 3y = 0$.

(i) Determinare un'equazione cartesiana di $\mathcal{C}$.

(ii) Determinare un'equazione cartesiana della forma canonica $\mathcal{C}'$ di $\mathcal{C}$.

(ii) Determinare un'isometria che trasforma $\mathcal{C}$ in $\mathcal{C}'$.