COGNOME ........................ NOME ........................ MATRICOLA ..................

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO.

**Esercizio 1.** Sia $V := \{A \in M^{3\times 3}(\mathbb{R}) \ : \ {}^tA = -A\}$ l'insieme delle matrici $3 \times 3$ antisimmetriche reali e $W := \{A \in M^{3\times 3}(\mathbb{R}) \ : a_{1,1} = a_{1,2} = a_{1,3} = a_{2,1} = a_{3,1} = 0\}$.

(i) Mostrare che $V$ e $W$ sono sottospazi vettoriali di $M^{3\times 3}(\mathbb{R})$, esibendo una base sia di $V$ che di $W$.

(ii) Determinare una base sia di $V \cap W$ che di $V \cup W$.

(iii) Scegliere un supplementare di $V + W$, indicandone una base.

**Esercizio 2.** In $\mathbb{R}^4$ si considerino i vettori $v_1 = (1, 1, 2, 3)$, $v_2 = (2, 3, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, 1, 1)$ e i vettori $b_1 = (0, 0, 1, 1)$, $b_2 = (2, 4, 2, 2)$, $b_3 = (0, 2, -2, 4)$.

(i) Stabilire quali tra i vettori $b_1$, $b_2$ e $b_3$ appartengono a $\mathrm{Span}\{v_1, v_2, v_3\}$.

(ii) Esprimere i vettori trovati in (i) come combinazione lineare dei vettori $\{v_1, v_2, v_3\}$.

(iii) Esprimere il vettore nullo come combinazione lineare non banale dei vettori $\{v_1, v_2, v_3, b_1, b_2, b_3\}$.

**Esercizio 3.** Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ sia $\pi$ il piano di equazione $x + y = 2$, sia $s$ la retta per $P = (1, 1, 1)$ e $Q = (1, 2, 2)$, e sia $r$ la retta ortogonale ad $s$, contenuta in $\pi$ e incidente $s$.

(i) Determinare equazioni cartesiane e parametriche della retta $r$.

(ii) Calcolare l'area del triangolo di vertici $P$, $Q$, $R$, dove $R = (2, 2, 2)$.

(iii) Determinare equazioni per la circonferenza circoscritta al triangolo triangolo di vertici $P$, $Q$, $S$, dove $S = (2, 0, 2)$.

**Esercizio 4.** Sia $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ la riflessione ortogonale rispetto al piano di equazione $x + y + z = 0$. Si determini la matrice che rappresenta $F$ rispetto alla base canonica.

**Esercizio 5.** Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$ definita da

$$L(x, y, z, t) = (5x, 3z + 4t, 3y, 4y)\,.$$

(i) Stabilire se $L$ è diagonalizzabile. In caso affermativo determinarne una base diagonalizzante, altrimenti spiegare perché non lo è.

(ii) Scegliere due autovettori $v$, $w$ di $L$ che siano linearmente indipendenti e tali che $< v, w >= 30$.

(iii) Sia $v = L(1, 1, 1, 1)$. Mostrare che se $w$ e' un vettore ortogonale a $v$, allora $L(w)$ e' ortogonale a $(1, 1, 1, 1)$.

**Esercizio 6.** Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^2$ si consideri la conica euclidea $\mathcal{C}$ di equazione

$$11x^2 - 24xy + 4y^2 + 28x - 96y - 120 = 0\,.$$

(i) La si classifichi.

(ii) Determinare un'isometria che trasformi $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica $\mathcal{C}'$.