COGNOME . . . . NOME . . . . MATRICOLA . . . .

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO.

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}_{\leq 4}[x]$ dei polinomi di grado pari o inferiore a 4, si considerino i sottospazi $V = \{p(x) = p(-x)\}$ e $W = \{p(x) = -p(-x)\}$. Determinare dimensione e base di V, W, $V + W$, $V \cap W$.

Esercizio 2. Al variare del parametro reale t si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x - 2y + tz = -1 \\ ty + z = t \\ -x + 3z = t \end{cases}$$

(i) Determinare i valori del parametro t per i quali il sistema ha soluzione unica.

(ii) Determinare i valori del parametro t per cui il sistema non ha soluzione.

(ii) Per i valori di t per cui la dimensione dello spazio delle soluzioni risulta essere > 0, trovare tutte le soluzioni.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ si considerino i punti $A = (1, 0, 0)$, $B = (2, 1, 3)$, $C = (0, 1, 0)$, $D = (1, -2, 0)$.

(i) Determinare equazioni cartesiane e parametriche del piano BCD.
(ii) Determinare il punto del piano BCD più vicino ad A.
(iii) Determinare la posizione reciproca delle rette AB e CD.

Esercizio 4. Sia $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ la riflessione ortogonale rispetto al piano di equazione $x - y - z = 0$. Si determini la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica di $\mathbb{E}^3$.

Esercizio 5. Sia $L : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$ l'applicazione lineare definita da $L(x, y, z, w) := (0,\ z/2 - w/2,\ y,\ -y)$ e sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{E}^4$ definito dall'equazione $z + w = 0$.

(i) Determinare una base sia del nucleo che dell'immagine di L.

(ii) Mostrare che il sottospazio W è L-invariante, ovvero che $L(W) \subset W$.

(iii) Stabilire se la restrizione $L|_W : W \to W$ di L a W è diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinare una base diagonalizzante.

Esercizio 6. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^2$ si consideri la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $(-1, -1)$ e raggio $2\sqrt{2}$.

(i) Si determinino equazioni cartesiane delle rette tangenti a tale circonferenza nei punti di intersezione di $\mathcal{C}$ con la retta r di equazione $x - y = 0$.

(ii) Si determini un'isometria $F : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ che trasformi la retta r nella retta s di equazione $x = 2$ e l'origine nel punto di coordinate $(2, 0)$.

(iii) Si determini un'equazione cartesiana per l'immagine $F(\mathcal{C})$ di $\mathcal{C}$ tramite F.