COGNOME .... NOME .... MATRICOLA ....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO.

Esercizio 1.

i) Mostrare che i vettori $v_1 = (1, 0, -1)$, $v_2 = (2, 1, 1)$, $v_3 = (0, 1, -1)$ dello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ sono linearmente indipendenti

ii) Applicare Gram-Schmidt al fine di ottenere una base ortonormale $\{w_1, w_2, w_3\}$ tale che $w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$.

Esercizio 2. Al variare del parametro reale t si consideri il sistema lineare $\begin{cases} -2x - z = t \\ tx - 8y + z = -2 \\ -x + ty = -1 \end{cases}$

(i) Determinare i valori del parametro t per i quali il sistema risulta avere soluzioni, nessuna soluzione, infinite soluzioni.

(ii) Per i valori di t per cui il sistema ammette infinite soluzioni, trovarle tutte.

Esercizio 3. Sia V il sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ definito da

$$\begin{cases} x + 2y - z + w = 0 \\ x + 5y - 3z + 3w = 0 \\ x - y + z - w = 0 \end{cases}$$

e W lo span di $(1, 0, 0, 0), (0, 0, 2, 1), (3, 0, -4, -2)$. Si trovi la dimensione di V, W, $V \cap W$, $V + W$.

Esercizio 4. Si scelgano un'isometria diretta $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ ed un'isometria inversa $G : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ che trasformano il piano di equazione $x - 2y + 3z = 0$ nel piano di equazione $2x + 3y - z = 0$.

(i) Si determinino le matrici che rappresentano F e G rispetto alla base canonica di $\mathbb{E}^3$.

(ii) Dopo aver trovato equazioni del piano π' contenente il punto $(1, 1, 1)$ e parallelo a π, si determini la distanza di π da π'.

Esercizio 5. Sia $L : \mathbb{E}^4 \to \mathbb{E}^4$ l'applicazione lineare tale che $L(1,1,0,0) = (0,0,0,0)$, $L(0,0,1,1) = (1,1,0,0)$ e l'autospazio rispetto all'autovalore 5 è definito da $V_5(L) = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{E}^4 \ : \ z+w = 0 = x+y\}$. Sia inoltre $W := Im(L)$ l'imagine di L.

(i) Se L è diagonalizzabile, si trovi una base diagonalizzante. Se L non lo è, si spieghi perchè.
(ii) Determinare la matrice che rappresenta L rispetto alla base canonica.
(iii) Si mostri che la restrizione $L|_W : W \to W$ di L a W è autoaggiunta e si trovi una base ortonormale diagonalizzante.

Esercizio 6. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^2$ si considerino i punti $A = (1,-1)$ e $B = (-2,-4)$.

(i) Determinare un'isometria di $\mathbb{E}^2$ che trasformi A e B nei punti $F_1(c,0)$ e $F_2 = (-c,0)$, dove il valore di c sarà scelto opportunamente.
(ii) Determinare le equazioni dell'ellisse $\mathcal{C}$ per il punto $(-2,-1)$ e di fuochi A e B.
(iii) Determina l'eccentricità e di $\mathcal{C}$ (si ricordi che $e = c/a$).