COGNOME . . . . NOME . . . . MATRICOLA . . . .

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO.

Esercizio 1. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^4$ si considerino i sottospazi vettoriali $U := \{x + y - z + w = 0\}$ e $V := \text{Span}\{(1, 1, 1, 1), (2, 0, 1, 0)\}$.

(i) Indicare una base di $U \cap V$.
(ii) Indicare una base ortonormale del sottospazio $V^\perp$ (ortogonale a V).
(iii) Determinare le dimensioni di $U \cap V^\perp$ e $U + V^\perp$.

Esercizio 2. Al variare del parametro reale t si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x + z = t \\ 2x + ty + z = t \\ -x + tz = 1 \end{cases}$$

(i) Determinare i valori del parametro t per i quali il sistema risulta compatibile.
(ii) Per i valori di t per cui la dimensione dello spazio delle soluzioni risulta essere > 0, trovare tutte le solutioni.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ si considerino i piani $\pi_1 := \{x+2y+3z = 1\}$ e $\pi_2 := \{x-z = 2\}$. Sia ℓ la retta $\pi_1 \cap \pi_2$.

(i) Stabilire se il piano $\pi_3 := \{-x + 4y + 9z + 4 = 0\}$ contiene la retta ℓ.

(ii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano per l'origine e contenente la retta ℓ.

(iii) Determinare la proiezione ortogonale dell'origine sul piano π_1.

Esercizio 4. Sia $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ una delle due possibili rotazioni ortogonali di angolo $5\pi/6$ intorno all'asse di equazione $2x+y+5z = 0 = 4x-y+10z$. Si determini la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica. Stabilire se si tratta di un isometria diretta o inversa, argomentando la risposta.

Esercizio 5. Sia $L : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ l'applicazione lineare che fissa tutti i vettori del sottospazio vettoriale $\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{E}^3 \ : \ y + 5z = 0\}$ e trasforma il vettore $(1, 6, 0)$ nel vettore $(3, 8, 2)$.

(i) Determinare la matrice che rappresenta L rispetto alla base canonica.
(ii) Stabilire se L è diagonalizzabile e in caso affermativo determinarne una base diagonalizzante.
(iii) Posto $W := \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{E}^3 \ : \ 6x - y - 5z = 0\}$ si mostri che $L(W) \subset W$ e si stabilisca se la restrizione $L|_W : W \to W$ di L a W definisce un operatore autoaggiunto.

Esercizio 6. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^2$ sia $\mathcal{C}$ la conica di equazione $f = 0$, dove
$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2 - 6xy + x + y + 2\,.$$

(i) La si classifichi, osservando che si tratta di una conica a centro.
(ii) Si determinino le coordinate del centro C e le equazioni della riflessione R_C rispetto a C.
(iii) Mostrare che $f \circ R_C = f$.