COGNOME ..... NOME ..... MATRICOLA .....

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. È *necessario* accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*. Consegnare SOLO QUESTI FOGLI A4.

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{E}^5$ (quindi dimensione **5**) si considerino i sottospazi vettoriali $W = \{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \ : \ x_1 + x_4 + x_5 = 0 = 2x_1 - x_4 \}$

i) Esibire una base **ortonormale** di W e completarla ad una base **ortonormale** di $\mathbb{E}^5$ (quindi le basi **ortonormali** da esibire sono due).

ii) Scegliere un sottospazio vettoriale U di $\mathbb{E}^5$ tale che $dim(U \cap W) = 1$ e $U + W = \mathbb{E}^5$. Fornirne una **base** e un insieme di **equazioni lineari** che lo definiscono (quindi due richieste).

iii) Scegliere due vettori del sottospazio $W^\perp$ **ortogonale** a W che formino un angolo di $\pi/4$ (entrambi i vettori devono appartenere a $W^\perp$).

Esercizio 2. Al variare del parametro reale $a \in \mathbb{R}$, si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = a^2 \\ x_1 + x_2 + (1-a)x_3 = a \\ x_1 + x_2 = a \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1 \end{cases}$$

i) Stabilire per quali valori del parametro a tale sistema lineare risulta essere compatibile (giustificare spiegando anche perchè per i restanti valori non è compatibile).

ii) Per (tutti) tali valori, risolvere il sistema indicando esplicitamente la **giacitura** dell'insieme delle soluzioni.

Esercizio 3. In $\mathbb{E}^3$ si consideri il sottospazio vettoriale W generato dai vettori $(1,1,1)$ e $(0,-4,0)$.

i) Scegliere un'isometria lineare **diretta** F di $\mathbb{E}^3$ tale che $Span\{(3,0,4)\} \subset F(W)$, indicandone esplicitamente la matrice rappresentativa rispetto alla base canonica.

ii) Scegliere un'isometria lineare NON **diretta** G di $\mathbb{E}^3$ tale che $Span\{(3,0,4)\} \subset F(W)$, indicandone esplicitamente la matrice rappresentativa rispetto alla base canonica.

Esercizio 4. Nello spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ sia π il piano di equazione $x + 2y = 1$. Si considerino i punti $A = (1, 0, 1)$ e $C = (0, 1, 0)$.

(i) Determinare equazioni **parametriche** e **cartesiane** del piano θ ortogonale a π e contenente entrambi i punti A e C .

(ii) Calcolare la distanza della retta $\pi \cap \theta$ dall'origine.

(iii) Determinare la **proiezione ortogonale** del punto C sul piano π.

Esercizio 5. Fissato t reale NON nullo, sia $L_t : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ l'unico endomorfismo tale che

$$V_t(L_t) = Span\{(1,-1,2)\} \qquad \text{e} \qquad Ker(L_t) = Span\{(1,1,0),\ (1,-1,-1)\}\,.$$

(i) Determinarne una matrice rappresentativa e polinomio caratteristico (notazioni comprensibili).

(ii) Trovare tutti i valori di t tali che $||L_t(2,0,2)|| = 10\sqrt{6}$.

(iii) Stabilire per quali valori di t l'endomorfismo è autoaggiunto.

(iv) (facoltativo) Sia W un sottospazio vettoriale di $\mathbb{E}^3$ di dimensione 2 contenente l'autospazio $V_t(L_t)$. Mostrare che il nucleo della restrizione $(L_t)|_W : W \to W$ di L_t a W ha dimensione 1, ovvero $dimKer((L_t)|_W) = 1$ (sugg. che rapporto c'è tra $Ker((L_t)|_W)$ e $Ker((L_t)$?).