Esercizio 1. Sia W il sottospazio vettoriale di $\mathbb{E}^3$ definito da $4x-3z=0$ e sia $F:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ la riflessione ortogonale rispetto a W. Determinare la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica.

Soluzione. Completiamo la base ortonormale $\{(0,1,0),\ \frac{1}{5}(3,0,4)\}$ di W alla base ortonormale $\mathcal{B} := \{(0,1,0),\ \frac{1}{5}(3,0,4),\ \frac{1}{5}(4,0,-3)\}$ di $\mathbb{E}^3$. Allora

$$M_{\mathcal{B}}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, essendo sia la base canonica $\mathcal{E}$ che la base $\mathcal{B}$ ortonormali, la matrice del cambiamento di coordinate $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ e' ortoganale. Conseguentemente, la sua inversa $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$, risulta essere la trasposta di $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$. Dunque

$$M_{\mathcal{E}}(F) = M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(Id)M_{\mathcal{B}}(F)M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(Id) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 3/5 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ 4/5 & 0 & -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/25 & 0 & 24/25 \\ 0 & 1 & 0 \\ 24/25 & 0 & 7/25 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Determinare un'isometria lineare $F:\mathbb{E}^3\to\mathbb{E}^3$ che trasformi il vettore $(0,5,5)$ nel vettore $(5,5,0)$, indicando la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica. Una tale isometria è necessariamente diretta o necessariamente inversa? Motivare la risposta.

Soluzione. Ricordando che le permutazioni con segno delle coordinate sono isometrie, si ottiene molto facilmente sia un'isometria diretta che una inversa con la proprieta' voluta. Alternativamente, proponiamo un metodo che si applica anche nel caso che il secondo vettore non sia ottenibile tramite una permutazione delle coordinate del primo.

Inglobiamo opportunamente i vettori normalizzati $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)$ in due basi ortonormali. Nel farlo abbiamo una vasta scelta. Per comodita' ne scegliamo due positivamente orientate (anche con questa richiesta la scelta rimane vasta), ad esempio

$$\mathcal{B} := \{(1,0,0),\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)\}$$

e

$$\mathcal{C} := \{(0,0,1),\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\}$$

di $\mathbb{E}^3$. Rispetto a queste basi tutte le isometrie con la proprieta' richiesta sono rappresentate, al variare di θ in $[0,2\pi)$, o da

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(F_\theta^+) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

o da

$$M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(F_\theta^-) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Per trovare la matrice richiesta basta scegliere ad esempio F_θ^+, fissare un ampiezza, ad esempio $\theta = 0$, e calcolare

$$M_\mathcal{E}(F_0^+) = M_{\mathcal{E},\mathcal{C}}(Id)M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(F_0^+)M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(Id) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

che rappresenta l'isometria (diretta) F_0^+ che trasforma i vettori della base B nei vettori della base C, rispettivamente. In alternativa, avemmo potuto esprimere i vettori della base canonica come combinazione lineare di quelli della base $\mathcal{B}$ e sfruttare la linearita' di F_0^+ (vedere soluzione dell'esercizio 4). Scegliendo tra le F_θ^- avremmo ottenuto delle isometrie inverse.

Esercizio 3. Sia $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ una delle due possibili rotazioni ortogonali di angolo $2\pi/3$ intorno all'asse di equazione $2x + 4y - z = 0 = 4x - 5y - 2z$. Si determini la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica.

Soluzione. Tale asse e' generato dal versore $\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2)$ che completiamo alla base ortonormale

$$\mathcal{B} := \{\tfrac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2),\ (0, 1, 0),\ \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, -1)\}.$$

Una delle due rotazioni e' allora determinata da

$$M_\mathcal{B}(F) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Come nella soluzione dell'esercizio 1, essendo sia la base canonica $\mathcal{E}$ che la base $\mathcal{B}$ ortonormali, la matrice del cambiamento di coordinate $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$ e' ortoganale. Conseguentemente, la sua inversa $M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$, risulta essere la trasposta di $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}$. Quindi

$$M_\mathcal{E}(F) = M_{\mathcal{E},\mathcal{B}}(Id)M_\mathcal{B}(F)M_{\mathcal{B},\mathcal{E}}(Id) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \ ...(svolgere).$$

Esercizio 4. Si scelga un'isometria $F : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ tale che $F(1, 0, 1) = (0, 1, -1)$ e $F(0, 1, 0) = (1, 0, 0)$. Si determini la matrice che rappresenta F rispetto alla base canonica.

Soluzione. Completiamo l'insieme $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ ad una base aggiungendo il vettore $(1, 0, -1)$ (con l'altra possibile scelta, $(-1, 0, 1)$, avremmo ottenuto una base concorde a quella canonica). Una delle due possibili scelte di una tale isometria si ottiene imponendo $F(1, 0, -1) = (0, 1, 1)$ (l'unica altra scelta si ottiene imponendo $F(1, 0, -1) = (0, -1, -1)$), infatti in tal modo i versori della base ortonormale

$$\{(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}),\ (0, 1, 0),\ (\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}})\}$$

vengono mandati in quelli della base ortonormale

$$\{(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}),\ (1, 0, 0),\ (0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}})\},$$

che e' condizione necessaria e sufficiente affinche' F sia un'isometria. Questa volta procediamo in maniera meno "sofisticata". Si ha

$$F(1,0,0) = F\big(\tfrac{1}{2}(1,0,1) + \tfrac{1}{2}(1,0,-1)\big) = \tfrac{1}{2}((0,1,-1) + (0,1,1)) = (0,1,0)$$
$$F(0,1,0) = (1,0,0)$$
$$F(0,0,1) = F\big(\tfrac{1}{2}(1,0,1) - \tfrac{1}{2}(1,0,-1)\big) = \tfrac{1}{2}((0,1,-1) - (0,1,1)) = (0,0,-1)$$

e quindi

$$M_{\mathcal{E}}(F) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$