COGNOME .... NOME ....

Esonero di Geometria IV del 25 novembre 2025

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti e accompagnare le risposte con spiegazioni chiare e sintetiche.

Esercizio 1.
Sia $X = \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$. Si considerino i cammini chiusi $a : [0,1] \to X$ e $b : [0,1] \to X$ definiti da $a(t) = 1 - e^{2\pi i t}$, $b(t) = e^{2\pi i t} - 1$.

(i) Si dica se in $\pi_1(X, 0)$ $[a] = [b]^{-1}$
(ii) Si dica se in $\pi_1(X, 0)$ $[a * b] = [b * a]$.
(iii) Si dica se le funzioni continue da $S^1 \cong [0,1]/\{0,1\}$ a X (laccetti) indotte da $a * b$ e $b * a$ sono omotope.

SOLUZIONE:
Per il teorema di Van Kampen si ottiene $\pi_1(X, 0) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ dove le due copie di $\mathbb{Z}$ sono generate da $[a]$ e $[b]$ rispettivamente. Basta considerare la decomposizione $X = A \cup B$, con $A = \{z \in X | Re(z) > -1\}$ e $B = \{z \in X | Re(z) < 1\}$. Si ha che $A \cap B$ è contraibile, mentre A e B hanno come retratto di deformazione due circonferenze, che sono rispettivamente l'immagine di a e di b. Quindi gli elementi di $\pi_1(X, 0)$ sono le parole scritte utilizzando $[a], [b]$ e i loro inversi, senza alcuna relazione. In particolare $[a] \neq [b]^{-1}$ e $[a * b] = [a][b] \neq [b][a] = [b * a]$, quindi (i) e (ii) hanno risposta negativa. Sappiamo che le funzioni continue da S^1 a X indotte da $a * b$ e $b * a$ sono omotope se e solo se $[a * b]$ e $[b * a]$ sono coniugate nel gruppo fondamentale, e questo è vero perché $[a][b] = [b]^{-1}([b][a])[b]$, dunque la risposta a (iii) è affermativa.

Esercizio 2. Si consideri il quoziente X di $D_2 \times \{0, 1\}$ (unione disgiunta di due dischi) tramite la relazione di equivalenza indotta da $(z^2, 0) \sim (z^3, 1)$ se $z \in S^1$.

(i) Si verifichi che un sottospazio di X è omeomorfo a $\mathbb{RP}^2$.
(ii) Si calcoli il gruppo fondamentale di X.
(iii) Si dica se X è una superficie.

SOLUZIONE: Come punto base possiamo scegliere $x_0 = [(1, 0)] = [(1, 1)]$. La relazione di equivalenza indotta dalla relazione data verifica $(z, 0) \sim (\zeta z, 0)$ se $\zeta^3 = 1$ e $(z, 1) \sim (-z, 1)$. Il sottospazio $(D_2 \times \{1\})/\sim$ è dunque omeomorfo a $\mathbb{RP}^2$, il cui gruppo fondamentale è $\mathbb{Z}_2$. Analogamente si vede che il sottospazio $(D_2 \times \{0\})/\sim$ ha come gruppo fondamentale $\mathbb{Z}_3$. Per calcolare il gruppo fondamentale di X utilizziamo Van Kampen, decomponendo $X = U \cup V$ dove $U = X \setminus [(0, 0)]$ e $V = X \setminus [(0, 1)]$. Allora U ha come retratto di deformazione proprio $(D_2 \times \{1\})/\sim$ (retraendo $(D_2 \setminus \{0\}) \times (\{0\})$ sul suo bordo), e $\pi_1(U, x_0) \cong \mathbb{Z}_2$. Analogamente V si retrae su $(D_2 \times \{0\})/\sim$, e ha gruppo fondamentale $\pi_1(V, x_0) \cong \mathbb{Z}_3$. L'intersezione $U \cap V$ si retrae sulla circonferenza $(S^1 \times \{0\})/\sim = (S^1 \times \{1\})/\sim$, dunque $\pi_1(U \cap V, x_0) \cong \mathbb{Z}$. Le inclusioni $i_U : U \cap V \to U$ e $i_V : U \cap V \to V$ inducono sui gruppi fondamentali le proiezioni sul quoziente $(i_U)* : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2$ e $i_V : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$. Dunque $\pi_1(X, x_0)$ è il gruppo con con due generatori a, b soggetti alle relazioni $a^2 = 1$, $b^3 = 1$, $a = b$, ovvero il gruppo banale! Se X fosse una superficie, essendo semplicemente connesso e compatto, dovrebbe essere omeomorfo alla sfera, per il teorema di classificazione. Dunque $X \setminus x$ dovrebbe essere omeomorfo a $\mathbb{R}^2$ per ogni $x \in X$, e quindi contraibile. Ma abbiamo visto sopra che scegliendo $x = [(0, 0)]$ si ha che $\pi_1(X \setminus x, x_0) \cong \mathbb{Z}_2$, dunque X non è una superficie.