ARC 2020/21. Esercizi 5. Singolarità isolate, sviluppi di Laurent, teorema dei residui e calcolo di integrali.

---

1. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa.
   (a) Verificare che se f che ha uno zero di ordine k in $z = 0$, allora $1/f$ ha un polo di ordine k in $z = 0$.
   (b) Sia $z = 0$ una singolarità (rimovibile, essenziale, polo) di f. Determinare il corrispondente tipo di singolarià di $1/f$.

2. Determinare e classificare le singolarità delle seguenti funzioni:

$$\tan z, \quad \tfrac{1}{z^3}\textstyle\sum_{n=2}^{\infty} 2^n z^n, \quad ze^{1/z}e^{-1/z^2}, \quad \frac{\sin\frac{1}{z}}{z^4}, \quad \frac{\sin z}{z^4}, \quad \frac{1}{z^3} - \cos z.$$

3. Sia $f(z) = \frac{z^2}{z^2+1}$. Determinare la serie di Laurent di f intorno a $z = i$.

4. Sia f una funzione olomorfa su $\Delta(0, r) \setminus \{0\}$, $0 < r \leq +\infty$. Supponiamo che $z = 0$ sia un polo di ordine k. Allora lo sviluppo di Laurent di f in $z = 0$ è dato da

$$f(z) = \textstyle\sum_{n\geq -k} a_n z^n, \qquad a_n = \frac{1}{(n+k)!} g^{(n+k)}(0), \quad \text{dove } g(z) = z^k f(z).$$

5. Sia $f(z) = \frac{e^z}{(z-i)^3(z+2)^2}$.
   (i) Mostrare che $z = i$ è un polo di f di ordine 3.
   (ii) Calcolare i coefficienti della parte singolare della serie di Laurent di f centrata in $z = i$.
   (iii) Mostrare che $z = -2$ è un polo di f di ordine 2.
   (iv) Calcolare i coefficienti della parte singolare della serie Laurent di f centrata in $z = -2$.

6. Siano $\gamma_2(\theta) = e^{i\theta}$, per $\theta \in [0, 2\pi]$, e $\gamma_1(\theta) = 3e^{i\theta}$, per $\theta \in [0, 2\pi]$. Calcolare

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{z^2+5z}{(z-2)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{z^2+5z}{(z-2)}dz$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{z^2-2}{z}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{z^2-2}{z}dz$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{z^3-3z-6}{z(z+2)(z+4)}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2} \frac{z^3-3z-6}{z(z+2)(z+4)}dz$$

7. Mostrare che la funzione definita da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$ è olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Calcolare il suo integrale su $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, per $\theta \in [0, 2\pi]$.

8. Calcolare gli integrali

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^3}dz, \qquad \int_\gamma \frac{e^{1/z}}{z^3}dz,$$

   su $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, per $\theta \in [0, 6\pi]$ e su $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, per $\theta \in [0, 2\pi]$.

9. Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_\gamma \frac{z}{(z-1)(z-2i)}dz \qquad \{\gamma(\theta) = 5e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 2\pi]\},$$

$$\int_\gamma \frac{e^z}{\sin z}dz \qquad \{\gamma(\theta) = e^{i\theta}, \quad \theta \in [0, 4\pi]\},$$

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(z+2)(z+1)}dz \qquad \gamma = \text{triangolo di vertici } -3, 1 \pm i, \text{ percorso in senso orario.}$$

10. Calcolare i seguenti integrali col metodo dei residui:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{2-\cos\theta}d\theta, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^4}dx, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}dx.$$

12. Calcolare i seguenti integrali reali col metodo dei residui:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x \; dx}{x^2+4}, \qquad \int_0^{+\infty} \frac{x\sin x}{1+x^2}dx.$$