ARC 2020/21. Esercizi 4. Stime di Cauchy, Teorema di Liouville, principi di unicità del prolungamento analitico e di identità, teorema di convergenza di Weierstrass, teorema del prolungamento di Riemann, principio del massimo modulo, lemma di Schwarz, automorfismi del disco.

---

1. Sia $a \in \Delta$, dove Δ è il disco unitario aperto in $\mathbb{C}$. Orientato il bordo S^1 di Δ come al solito, calcolare uno dei due integrali

$$\int_{S^1} \frac{1}{(z-a)(z-\frac{1}{a})} dz, \qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{1-2a\cos\theta+a^2} d\theta\,.$$

   Da tale calcolo dedurre l'altro.

2. A lezione si è osservato che ogni funzione continua reale è limite localmente uniforme di funzioni analitiche reali, volendo polinomi. Sempre nello spirito di evidenziare differenze tra il caso reale e quello complesso, osservare che la successione $f_n\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ definita da $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, converge uniformemente sui compatti dell'intervallo $I = (0,1)$ a $f \equiv 0$, ma $f_n' \not\to f'$. Perchè non si applica il teorema di Montel alle estensioni olomorfe delle f_n in un intorno Ω di I in $\mathbb{C}$?

3. Sia $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di polinomi tutti di grado minore o uguale ad un N fissato. Mostrare che se $p_n \to p$ uniformemente sui compatti, allora la funzione limite p è un polinomio di grado minore o uguale ad N.

4. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ un aperto e sia $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa, non identicamente nulla. Dimostrare che l'insieme degli zeri di f in Ω è al più numerabile (sugg.: Ω è unione numerabile di compatti).

5. i)Sia $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, tale che $|f(z)| \le M|z|^n$, con M costante positiva, per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \Delta_R(0)$, $R > 0$. Allora f è un polinomio di grado minore o uguale ad n.
   ii) Sia $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa, tale che $|f(z)| \le M(1 + |z|^n)$, con M costante positiva, per ogni $z \in \mathbb{C}$. Allora f è un polinomio di grado minore o uguale ad n.

6. Mostrare che le funzioni

$$\frac{\sin z}{z}, \qquad \frac{e^z-1}{z}, \qquad \frac{\cosh z-1}{z}$$

   sono intere, ovvero si estendono olomorfe su tutto $\mathbb{C}$ (l'origine è una singolarità rimovibile).

7. i) Come conseguenza del teorema di fattorizzazione abbiamo visto che se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è olomorfa e iniettiva, allora f' non si annulla mai (pertanto l'inversa locale di f è olomorfa, e quindi $f : \Omega \to f(\Omega)$ è un biolomorfismo).
   ii) Mostrare con un esempio che per $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analitica reale e iniettiva ma non olomorfa, il determinante dello Jacobiano (reale) si può annullare spesso e volentieri.

8. Sia R positivo, f olomorfa su $\{z \in \mathbb{C} \ :\ |z| > R\}$ e sia g definita su $\Delta^*_{1/R}(0) = \{z \in \mathbb{C} \ :\ 0 < |z| < 1/R\}$ da $g(z) := f(1/z)$. Mostare che g si estende olomorficamente su $\Delta_{1/R}(0)$ se e solo se f è limitata su $\{z \in \mathbb{C} \ :\ |z| > R + \varepsilon\}$ per ogni $\varepsilon > 0$.

9. Sia f olomorfa sul dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ e sia $\sum a_n(z-z_0)^n$ la serie di Taylor di f in $z_0 \in \Omega$. Usando le stime di Cauchy, mostrare che il raggio di convergenza della serie è maggiore o uguale al raggio del più grande disco $\Delta(z_0, r)$ di centro z_0 contenuto in Ω.

10. Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}$. Mostrare che per f olomorfa e non costante su Ω, i minimi (locali) del modulo di f coincidono con gli zeri di f.

11. (dopo aver svolto 11) Sia f non costante e olomorfa in un intorno del disco unitario Δ. Mostrare che se $|f|$ è costante sul bordo di Δ, allora f ammette almeno uno zero in Δ.

12. i) Sia $\mathbb{H} := \{\, z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im}\, z > 0 \,\}$ e Δ il disco unitario. Mostrare che la trasformazione di Cayley, definita da
$$C : \mathbb{H} \to \Delta\,, \qquad z \ \to \ \tfrac{z-i}{z+i}$$
è un biolomorfismo e trovarne l'inversa.
ii) Mostrare che tutte le strisce $\mathbb{H}_r := \{\, z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < \mathrm{Im}\, z < r \,\}$ sono biolomorfe ad $\mathbb{H}$ e quindi a Δ.

13. Mostrare che non esiste una funzione olomorfa $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$, con Ω intorno aperto di 0, tale che:
    (a) $f(\frac{1}{n}) = (-1)^n \frac{1}{n^2}$,
    (b) $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2^n}$,
    (c) $|f^{(n)}(0)| > n!\, n^n$.

14. Sia $\Omega \subset \mathbb{C}$ aperto connesso. Siano $f, g\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfe, tali che $fg \equiv 0$. Allora $f \equiv 0$ oppure $g \equiv 0$.

15. Sia f una funzione olomorfa su un intorno del disco chiuso $\overline{\Delta}$, non identicamente nulla su Δ.
    (a) Dimostrare che f ha al più un numero finito di zeri in Δ.
    (b) Determinare gli zeri di $f(z) = \sin(\frac{1}{1-z})$ nel disco Δ e confrontare il risultato col punto precedente.

16. Trovare tutti gli zeri delle funzioni $\sin z$ e $\cos z$. Sia f olomorfa su $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{\pi/2 \pm k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ tale che $f(\pi/n) = \tan(\pi/n),\ n \geq 3$. Dedurre che $f(z) = \frac{\sin z}{\cos z}$ e mostrare che la funzione f non assume i valori $\pm i$.

17. Per u armonica su un dominio Ω di $\mathbb{C}$ enunciare e di mostrare i seguenti risultati:
    i) principio di unicità del prolungamento analitico,
    ii) il teorema della media,
    iii) il principio del massimo,
    iv) il principio del minimo.

Sugg. In iii e iv considerare la funzione e^u.

18. Mostrare che ogni automorfismo del disco unitario Δ si estende iniettivamente su un intorno di $\overline{\Delta}$ e ammette almeno un punto fisso in $\overline{\Delta}$.