1. Calcolare
$$\int_\gamma \frac{\sin^3 z}{(z-10)^3}dz, \qquad \int_\gamma \frac{\cos^3 z}{(z-\pi/4)^3}dz, \qquad \int_\gamma \frac{\sin z}{z^{38}}dz\,,$$
per $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, e per $\gamma(\theta) = 22e^{i\theta}$, sempre con $\theta \in [0, 2\pi]$.

2. Calcolare
$$\int_\gamma \Big(\frac{z-2}{2z-1}\Big)^3 dz,$$
dove $\gamma = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

3. Siano $|a| < 1 < |b|$. Per $n, m \in \mathbb{Z}$, calcolare
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(z-b)^m}{(z-a)^n}dz,$$
dove $\gamma = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

4. Calcolare
$$\int_\gamma \frac{e^z}{z}dz, \qquad \int_\gamma \frac{e^z}{(z-1/2)^2}dz,$$
dove $\gamma = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

5. Calcolare
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^2+z}{(z+3)(z-2i)}dz,$$
dove $\gamma = \{1 + 5e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

6. Per a reale positivo calcolare
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+a^4}dx\,, \qquad \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+a^4}dx\,,$$
integrando $(z^2+a^2)^{-1}$ sulla spezzata chiusa, semplice e regolare di vertici 0, R e $Re^{i\pi/4}$ più comoda che vi viene in mente, con R positivo che tende a ∞.

7. Sia $\gamma = \{e^{-i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$ la circonferenza di centro 0 e raggio 1 percorsa in senso orario. Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, scrivere una funzione f olomorfa non costante su $\{z : \frac{1}{2} < |z| < 2\}$ tale che
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \lambda.$$

8. Determinare
$$\int_\gamma \frac{1}{8z^3-1}dz$$
dove $\gamma(\theta) = Re^{i\theta}$, con $\theta \in [0,\ 2\pi]$ e $R > 11$. Sugg. Stimare l'integrale, per R assai grande, usando l'esercizio 6 del foglio 2.

9. (Media sui dischi) Mostrare che se f è olomorfa su un disco Δ di centro z_0 allora

$$f(z_0) = \frac{1}{Area(\Delta)} \int_\Delta f(z) dx dy\,.$$

10. Sia $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ olomorfa e doppiamente periodica, i.e. $f(z+\omega_1) = f(z+\omega_2) = f(z)$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, dove $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ sono linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$. Allora f è costante.

11. i) Sia $f = u+iv$ olomorfa sul piano complesso $\mathbb{C}$. Mostrare che se u (o se preferite v) è limitata, allora f è costante.
ii) Verificare caso per caso che le parti reali e immaginarie delle funzioni intere discusse finora a lezione non sono limitate.
iii) (cf. es. 10 del foglio 2) Sia u una funzione reale armonica sul $\mathbb{R}^2$, quindi di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$ e tale che $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (a posteriori sarà analitica reale, visto che . . .). Mostrare che se u è limitata allora è costante (Liouville per armoniche).

12. Siano $f,\ g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ due funzioni olomorfe, con $g(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, tali che $|f(z)| \leq |g(z)|$, per ogni $z \in \mathbb{C}$. Dimostrare che esiste una costante $c \in \mathbb{C}$ tale che $f(z) = cg(z)$. Mostrare che l'ipotesi "$g(z) \neq 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$" è superflua.

13. Dati in $\mathbb{C}$ un compatto K e un chiuso C non vuoti con $K \cap C = \emptyset$, mostrare che $d(K, C) > 0$. Osservare che l'analoga affermazione nel caso in cui K sia solamente chiuso (ma non compatto) è in generale falsa.