1. Calcolare
$$\int_\gamma (\bar{z} + z^2\,\bar{z})dz,$$
dove γ, parametrizzata da $\{re^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$, è la circonferenza di centro 0 e raggio $r > 0$, percorsa una volta, in senso antiorario.

2. Calcolare
$$\int_\gamma (5z^4 - z^3 + 2)dz, \qquad \int_\gamma cos z\, dz, \qquad \int_\gamma e^{3z} dz\,, \qquad \int_\gamma \frac{1}{z + \frac{1}{2}} dz$$
dove γ è la circonferenza di centro 0 e raggio 1, oppure γ è il quadrato di vertici $0, 1, 1 + i, i$, oppure γ è il segmento di estremi $0, 1 + i$.

3. Calcolare
$$\int_\gamma \frac{\sin^3 z}{(z - 10)^3} dz,$$
per $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, con $\theta \in [0, 2\pi]$, e per $\gamma(\theta) = 22e^{i\theta}$, sempre con $\theta \in [0, 2\pi]$.

4. Ricalcolare
$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz,$$
dove γ è una circonferenza di raggio $r > 0$ centrata nell'origine.
Al variare di $n \in \mathbb{Z}$ calcolare
$$\int_\gamma z^n dz, \,.$$

Discutere quindi il caso di γ circonferenza qualunque non contenente l'origine.

5. Calcolare
$$\int_\gamma \frac{1}{(z - 1)(z - 2i)} dz\,, \qquad \int_\gamma \frac{z}{z^2 - 1} dz\,,$$
dove γ è parametrizzata da $\{4e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$.

6. Sia $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa su un aperto Ω del piano complesso e sia $\gamma\colon [a, b] \to \Omega$ una curva a supporto in Ω. Verificare che vale
$$|\int_\gamma f(z)dz| \le max_\gamma |f(\gamma(t))|\, L(\gamma),$$
dove $L(\gamma)$ indica la lunghezza di γ.

7. Si consideri la funzione $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ definita da $f(z) := \ln |z|$ e si ricordi che su $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^{\le 0}$ si ha $f(z) = Log z - iArg z$. Da tale uguaglianza per ricavare la 1-forma df.

8. Si consideri la parametrizzazione $\gamma(t) = t$, per $t \in [0, 1]$. Mostrare che la funzione
$$f(z) := \int_\gamma \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$$

è olomorfa fuori dal supporto $\gamma([0,1])$ di γ e su tale dominio determinarne esplicitamente i valori.

9. Per $0 < b < 1$ calcolare
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-b+x^2}{(1-b+x^2)^2+4bx^2}dx$$
integrando $(1+z^2)^{-1}$ sul rettangolo di vertici $\pm a$, $\pm a + i\sqrt{b}$, con $a > 0$ che tende a ∞.

10. Ridimostrare che per una funzione $g : \Omega \to \mathbb{C}$ continua si ha:
    i) la forma gdz è esatta se e solo se la funzione g ammette una primitiva, ovvero $g = f'$ con f olomorfa su Ω
    ii) la forma gdz è chiusa se e solo se g è olomorfa.

11. (Dopo aver svolto l'esercizio 9) Sia u una funzione reale di classe almeno $C^2(\Omega)$ e armonica, ovvero tale che $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Mostrare che se Ω è connesso, semplicemente connesso, allora
    i) esiste un'armonica coniugata, ovvero v reale di classe almeno $C^2(\Omega)$ e armonica tale che $f = u + iv$ sia olomorfa.
    ii) la differenza di due armoniche coniugate è una funzione costante.

12-18 Esercizi 1,2,3,4,5,6,7 sulle note di Claudio Rea a pag. 71