1. Stabilire se esistono finiti i seguenti limiti

$$\lim_{z\to 0}\frac{3z+5}{6z+1} \qquad \lim_{z\to\infty}\frac{iz+2}{4iz+6-i}, \qquad \lim_{z\to 0}\frac{z^2+1}{z}, \qquad \lim_{z\to 0}\frac{\bar{z}^2}{z^2}\,.$$

$2 \cong 10.$ Svolgere gli esercizi 1-10 a pag. 77 delle note di Claudio Rea.

3. Sia $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ una funzione olomorfa su un aperto connesso $\Omega\subset\mathbb{C}$:
   (a) se $f'(z)\equiv 0$, allora f è costante.
   (b) se $|f(z)|^2$ è costante, allora f è costante.
   (c) se $\arg(f(z))$ è costante, allora f è costante.

4. Sia f una funzione olomorfa su un aperto $\Omega\subset\mathbb{C}$. Verificare che la funzione $g(z) := \overline{f(\bar{z})}$ è olomorfa su $\overline{\Omega}=\{\bar{z}\ : z\in\Omega\}$.

5. Mostrare che
$$D_z=\frac{1}{2z}(\rho D_\rho - iD_\theta) \quad D_{\bar{z}}=\frac{1}{2\bar{z}}(\rho D_\rho + iD_\theta)\,.$$
dove, per $z\neq 0$, scriviamo $z=\rho e^{i\theta}$. Dedurrne (nuovamente) che ogni determinazione continua del logaritmo e' olomorfa e si ha
$$D_z\mathrm{Log}z=\frac{1}{z}\,.$$

6. Determinare tutti i punti dove le seguenti funzioni soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann:
$$f(z)=\bar{z}^2, \quad f(z)=x, \quad f(x,y)=x^2-y^2+i2xy, \quad f(x,y)=(x^2y-y^2x)+i2xy.$$

7. Sia $f\colon\Omega\to\mathbb{C}$ una funzione olomorfa su un aperto $\Omega\subset\mathbb{C}$. Sia $\gamma\colon[a,b]\to D$ una curva liscia. Dimostrare che
$$\frac{\partial f\circ\gamma}{\partial t}(t)=f'(\gamma(t))\frac{\partial\gamma}{\partial t}(t)\,,$$
dove $f'(\gamma(t))$ indica la derivata complessa $\partial f/\partial z$, valutata in $\gamma(t)$.

8. Siano $f,g\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ funzioni olomorfe. Ridimostrare che $g\circ f$ è olomorfa con derivata complessa $(g\circ f)'(z)=g'(f(z))f'(z)$ senza usare gli operatori differenziali complessi ∂_z e $\partial_{\bar{z}}$.

9. Sia $f(z)=u(z)+iv(z)$ olomorfa su un aperto Ω Dimostrare che u e v sono armoniche, cioè soddisfano $u_{xx}+u_{yy}=v_{xx}+v_{yy}=0$.

10. (i) Dimostrare che vale l'uguaglianza fra numeri complessi $\mathrm{Log}(zw)=\mathrm{Log}z+\mathrm{Log}w$, se z e w soddisfano la condizione $-\pi<\arg(z)+\arg(w)<\pi$.
    (ii) Dare un esempio di z e w per cui $\mathrm{Log}(zw)\neq\mathrm{Log}z+\mathrm{Log}w$.

11. Costruire una determinazione continua del logaritmo su $\mathbb{C}\setminus\{\,iy\ :\ y\leq 0\}$

12. Calcolare $\mathrm{Log}(\mathrm{Log}(i))$.

13. Utilizzando solo la determinazione principale del logaritmo, si confrontino i valori di $(i^i)^i$ e di $i^{i\cdot i} = i^{-1}$. L'insieme di tutti numeri complessi corrispondenti a $(i^i)^i$ coincide con l'insieme definito da i^{-1}?

14. Verificare le identità
$$\overline{e^z} = e^{\bar{z}}, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}.$$

15. Determinare gli zeri di $\sin z$ e calcolare $|\sin z|^2$ in funzione delle variabili reali. Ritrovare quindi gli zeri di $\sin z$ come zeri di $|\sin z|^2$.

16.
    (a) Verificare che $(\sin z)' = \cos z$ e $(\cos z)' = -\sin z$.
    (b) Verificare che $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$.
    (c) Sia $\tan z := \sin z / \cos z$, dove $\cos z \neq 0$. Calcolare la sua derivata.

17.
    (a) Calcolare $(\sinh z)'$ e $(\cosh z)'$.
    (b) Verificare che $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.
    (c) Sia $\tanh z := \sinh z \,/\, \cosh z$, definita dove $\cosh z \neq 0$. Calcolare la sua derivata complessa.

18. Calcolare i valori delle seguenti funzioni:
    (a) $\sin(-1+i), \quad \cos(\pi/2 - i)$.
    (b) $4\sinh(i\pi/3), \quad \cosh((2k+1)i\pi/2)$.

19. Sapendo che $\cos z = 2$, calcolare $\cos 2z$ e $\cos 3z$.

20. Risolvere le seguenti equazioni in $\mathbb{C}$:
$$e^{3z} = 1, \quad e^{4z} = i, \quad \sin z = 2, \quad \cos z = i.$$