1. Mostrare che per ogni $\theta \in \mathbf{R}$ si ha
$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\,.$$
2. Dato $\lambda \in \mathbf{C}$ e $n \geq 2$, determinare un polinomio a coefficienti reali di grado n che ha λ come radice.
3. Sia $f_j : \Omega \to C$ una successione di funzioni a valori complessi su un dominio di $\mathbf{C}$. Mostrare che $\{f_j\}$ converge localmente uniformemente se e solo se converge uniformemente sui compatti di Ω.
4. Sia $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(z)$ una serie di funzioni a valori complessi su un dominio Ω di $\mathbf{C}$. Mostrare che se converge assolutamente (localmente) uniformemente allora la serie converge (localmente) uniformemente.
5. Convincersi che sia l'esponenziale che le funzioni trigonometriche che quelle iperboliche convergono uniformemente su tutti i compatti del piano complesso.
6. (Importante) Mostrare che la serie geometrica $\sum_{j=0}^{\infty} z^j$ converge assolutamente localmente uniformemente sul disco unitario Δ.
7. Determinare disco di convergenza e somma della serie $1 + z + z^2 + z^4 + z^6 + z^8 + \ldots$.
8. Alcune variazioni sul tema dell'esercizio 6: determinare dominio di convergenza e somma delle serie
$$\textstyle\sum_{n\geq 0} \frac{(z+i)^n}{(1+i)^{n+1}}, \qquad \sum_{n\geq 0} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n, \qquad \sum_{n\geq 0} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n.$$
9. (approfondimento) Verificare che la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$ converge su tutti i punti del bordo del disco unità $|z| < 1$, eccetto $z = 1$ (suggerimento: scovare e applicare "Abel's test"). In tali i punti, calcolarne i valori (suggerimento: scovare e applicare teorema della convergenza radiale di Abel).
10. Determinare il raggio di convergenza delle serie
$$\textstyle\sum_{n\geq 0} n! z^{n!} \qquad \sum_{n\geq 0} z^{n!} \qquad \sum_{n\geq 0} n^n z^{n^2} \qquad \sum_{n\geq 0} z^{n^n}.$$
11. Discutere la convergenza delle serie
$$\textstyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n(n+1)} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n\sqrt{n+1}}$$
e delle rispettive serie derivate. Piu' in generale, mostrare che le serie
$$\textstyle\sum_n a_n z^n \qquad \sum_n a_n n z^{n-1}$$
hanno lo stesso raggio di convergenza (vedremo in futuro il teorema di Weierstrass: sia $\{f_n\}$ cuna successione di funzioni olomorfe uniformemente convergente sui compatti a f. Allora f è olomorfa e le successioni delle derivate di ogni ordine di $\{f_n\}$ convergono uniformemente sui compatti alle corrispondenti derivate di f).
12. Sia $\sum_n a_n z^n$ una serie con raggio di convergenza R, calcolare il raggio di convergenza delle serie
$$\textstyle\sum_n a_n^2 z^n \qquad \sum_n a_n z^{2n} \qquad \sum_n a_n^2 z^{2n}.$$
14. Sia $\sum_n a_n z^n$ una serie con raggio di convergenza R, e sia $\sum_n b_n z^n$ una serie per cui vale
$$|b_n| < n^2 |a_n|, \quad \forall n.$$
Far vedere che anche $\sum_n b_n z^n$ converge assolutamente per ogni z, con $|z| < R$.