Analisi Reale e Complessa

I appello, 5 gennaio 2020

Non è consentito l'uso di libri o fotocopie, ad eccezione del materiale scritto a mano con le formule. Non è consentito l'uso di strumenti di comunicazione. Durante l'esame NON è consentito lasciare l'aula o fare domande. Un esercizio, senza la giustificazione dei passaggi eseguiti, NON sarà presso in considerazione. Le risposte non motivate, senza calcoli o incomprensibili non saranno prese in considerazione. Consegnare solo questi fogli.

---

1. (8 pt)

Sia A il sottoinsieme di $[0,1]$ dei numeri della forma $0, a_1a_2a_3..$ in base due, tali che $a_{2n+1} = 0$ per tutti gli $n \geq 0$. Se due espansioni differenti rappresentano lo stesso numero, si richiede che in entrambe la condizione sia verificata. Si dimostri che

(a) (4pt) L'insieme A è di misura nulla.

(b) (4pt) L'insieme A è un insieme di tipo G_δ, non numerabile.

2. (8 pt) Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ di misura esterna non nulla. Si dimostri che per ogni $\alpha \in (0,1)$ esiste un intervallo $J = (a,b)$ tale che

$$|A \cap J|_e > \alpha |J|.$$

3. (8 pt) Siano f e g funzioni intere (olomorfe su tutto il piano complesso) non costanti.

A. Dimostrare che l'intersezione $O := f(\mathbb{C}) \cap g(\mathbb{C})$ è densa in $\mathbb{C}$. Discutere le possibili cardinalità del complementare di O in $\mathbb{C}$.

B. Siano fissate f e g intere iniettive. Calcolare, per R grandissimo, i tre integrali $\int_{\partial\Delta_R} \frac{e^z}{f(z)} dz$, $\int_{\partial\Delta_R} \frac{1}{(fg)(z)} dz$, $\int_{\partial\Delta_R} \frac{(fg)'(z)}{(fg)(z)} dz$.

4. (8 pt) Sia f olomorfa su un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ e sia $r > 0$ tale che $\Delta_r(z_0)$ è relativamente compatto in Ω.

A. Mostrare che il raggio di convergenza della serie di Taylor di f in z_0 è strettamente maggiore di r.

B. Per $f(z) := e^{z^2+z}$ mostrare che $f(\Delta_r) \subseteq \Delta_\rho$, dove $\rho = e^{r^2+r}$.

C. Sia $z_0 = 0$ uno zero di f di ordine 2 e $f''(0) = 2i$, $f'''(0) = 6$. Calcolare il residuo in 0 di $g(z) := \frac{1}{f(z)}$.