
COGNOME NOME

Risolvere gli esercizi negli spazi predisposti. Accompagnare le risposte con spiegazioni *chiare e sintetiche*.
Consegnare SOLO QUESTO FOGLIO.

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definita da $f(z) := \sin \bar{z}$. (i) Determinare tutti gli elementi dell'insieme $f^{-1}(2i)$. (ii) Determinare tutti i valori di \mathbb{C} ove f verifica le equazioni di Cauchy-Riemann. (iii) Mostrare che la composizione $f \circ f$ è olomorfa.

Esercizio 2. Dato un polinomio reale in due variabili $p(x, y)$, si definisca $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ come $u(x + iy) := p(x, y)$. (i) Determinare tutti i polinomi di grado uno e due tali che u sia armonica. (ii) Data u armonica come in (i), esibire una funzione intera (olomorfa su \mathbb{C}) con parte reale uguale ad u .

Esercizio 3. Indicata con $\bar{\Delta}$ la chiusura del disco unitario in \mathbb{C} , sia $f : \bar{\Delta} \rightarrow \bar{\Delta}$ una funzione continua su $\bar{\Delta}$ e olomorfa su Δ tale che $f(0) = 1/2$. (i) Mostrare che $f^{-1}(\partial\Delta) \subseteq \partial\Delta$. (ii) Esibire un primo esempio dove $f^{-1}(\partial\Delta) = \emptyset$ e un secondo esempio dove $f^{-1}(\partial\Delta) = \partial\Delta$.

Esercizio 4. Solamente dopo aver ben ponderato sui precedenti esercizi, calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z^2) dz, \quad \int_{\gamma} \frac{(z+2)\cos z}{z(z^2+9)} dz, \quad \int_{\gamma} \frac{z \cos z}{(2z-i)^3} dz, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{(x^2+1)(x^2+9)} dx$$

dove $\gamma(\theta) = 2e^{i\theta}$, per $\theta \in [0, 2\pi]$.