ARC 18/19, Iannuzzi-Rădulescu Nome:

Analisi Reale e Complessa

IV appello, 6 settembre 2019

Non è consentito l'uso di libri o fotocopie, ad eccezione del materiale scritto a mano con le formule. Non è consentito l'uso di strumenti di comunicazione. Durante l'esame NON è consentito lasciare l'aula o fare domande. Un esercizio, senza la giustificazione dei passaggi eseguiti, NON sarà presso in considerazione. Le risposte non motivate, senza calcoli o incomprensibili non saranno prese in considerazione. Consegnare solo questi fogli.

---

1. (8 pt)
Verificare o smentire il passaggio al limite sotto il segno di integrale :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi/2}\frac{1}{x}\sin\frac{\sqrt{x}}{n}dx = \int_0^{\pi/2}(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x}\sin\frac{\sqrt{x}}{n})dx$$

2. (8 pt) Siano $0 < a < b$. Applicando il teorema di Fubini alla funzione

$$f : [0.\infty) \times [a, b] \to R$$

definita con la formula

$$f(x, y) = e^{-xy},$$

si calcoli l'integrale

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx.$$

3. (8 pt) Sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una funzione liscia a valori complessi definita su un dominio Ω di $\mathbb{C}$ e sia $z_0 \in \Omega$.

A. Si dia un esempio di una tale f che non sia conforme in z_0,

B. Si mostri che il coniugio $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, definito da $z \to \overline{z}$, è anticonforme in ogni punto di $\mathbb{C}$, i.e. conserva l'ampiezza d'angolo tra coppie di direzioni distinte ma ne cambia l'orientazione.

C. Si mostri che se $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = 0$ e $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) \neq 0$, allora f è anticonforme in z_0.

4. (8 pt) Sia Ω un dominio di $\mathbb{C}$ e sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni olomorfe uniformemente convergente sui compatti di Ω a $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Si assuma inoltre che $|f_n(z)| > 0$ per ogni $z \in \Omega$.

A. Enunciare una delle due formulazioni del principio del massimo viste a lezione.

B. Siano $z_0 \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$ con $f(z_0) = 0$ e $\Delta_\varepsilon(z_0)$ relativamente compatto in Ω. Mostrare che esiste una successione $\{w_n\}$ contenuta nel bordo di $\Delta_\varepsilon(z_0)$ tale che $|f_n(w_n)| < |f_n(z_0)|$.

C. Dati $z_0 \in \Omega$ e $\varepsilon > 0$ come nel punto **B**, mostrare che esiste z_1 nel bordo di $\Delta_\varepsilon(z_0)$ tale che $f(z_1) = 0$. Trarne le dovute conclusioni sul comportamento di f sul dominio Ω.